



TITLE:

# 曲面板に関する研究( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

國枝, 治郎

---

CITATION:

國枝, 治郎. 曲面板に関する研究. 京都大学, 1966, 工学博士

ISSUE DATE:

1966-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r720>

RIGHT:



# 曲面板に関する研究

國枝治郎



# 曲面板に関する研究

昭和 40 年 10 月

國 枝 治 郎

# 目 次

序 論	1
第 I 部 曲面板の振動に関する研究	7
第一章 球殻の振動	7
序	7
§1 基本仮定および諸関係	15
§2 静的状態における各種の解法と一般解 について	17
§3 振動時の解の表現	26
§4 厳正解	32
§5 固有振動数について	36
§6 解の性質および特性値	38
§7 特性値による諸理論・方法の比較	45
§8 近似解およびその精度	47
§9 数値計算例	58
§10 結 び	62
§補	63
第二章 円筒殻の振動	66
序	66
第三章 H.P.シェルの振動	72
序	72
§1 用いられる記号	74
§2 基礎運動方程式とその解法	75
§3 近似度の検討	85

§4	Inextensional 振動と Extensional 振動 との関係	86
§5	プレストレスの存在する場合	89
§6	特性値より見た傾向	91
§7	計算例	95
§8	考 察	110
第Ⅱ部	曲面板の円孔問題に関する研究	113
第一章	円孔を有する球殻	113
序		113
§1	解の表現	114
第二章	円孔を有する円筒殻	116
序		116
§1	基礎方程式	118
§2	基礎方程式の解	120
§3	断面力の表示	129
§4	計算例	131
第三章	円孔を有するH.P.殻	139
序		139
§1	用いられる記号	140
§2	基礎方程式	141
§3	円孔があけられる場合の応力状態	155
第Ⅲ部	集中荷重を受ける曲面板に関する研究	164
第一章	集中荷重を受ける球殻	164
序		164
§1	解について	165

§ 補 I	170
§ 補 II, III	172
第二章 集中荷重を受ける円筒殻	173
序	173
§ 1 集中荷重に対する近似解	175
§ 補 函数間の関係について	179
第三章 集中荷重を受ける H. P. 殻	180
序	180
§ 1 解法と解	182
§ 2 板の場合への移行について	187
第 IV 部 Inextensional 解について	189
序	189
§ 1 既往の研究	190
§ 2 一般的な取り扱い	193
§ 3 Inextensional 解を与える式	199
§ 4 Inextensional 解	201
§ 5 Inextensional 状態のおこらないような境界条件	202
§ 6 補 曲面の幾何量	202
第 V 部 偏平 H. P. シェルの実用的な解について	205
序	205
§ 1 解法と解	207
§ 2 計算例	218
参考文献リスト (全編)	225

## 序 論

この論文の意図は一言でいえば、微小変形下における弾性論（いわゆる古典理論）にもとづいてであるが、曲面板構造の実用化にあたって残された問題を解明すると同時に、特に形態にもとづく曲面板の特質を明確にし、近づきつつある長大スパン構造時代の建築物としての曲面板構造の構造計画上の準拠とすべき資料を得るための基礎的な研究にある。

建築物にあるいは各種構造物としてますます需要の高まる曲面板（殻）構造物はその形状により Gauss の曲率を用いて正、零、負の三種に大別される。この分類に応じて各曲面板はそれぞれ特有の性状を示すであろうことは容易に想像されるが、具体的にこれら特有の性状をそのタイプに応じて比較論的に解明した研究はまだ内外に見当たらない。実設計にあたってどのタイプの曲面板を採用するかを決定する場合それら曲面板のタイプにもとづく特性を知ることは重要なことであり、また同一タイプの曲面板においても曲率やライズ、厚さ等の影響がその性質にどのように関係するかを知ることも必要なことである。そのためにはこの方面の研究は曲面板研究の重要にして且つ早急を要する分野である。このような比較論的研究は種々の方面からなされねばならないが、構造工学上一応考えられるのは ① 静的状態における性状、② 振動性状、③ Singularity 性状、④ 孔を有する場合の性状、

⑤一般解の内容からの考察、⑥風に対する応答性状、⑦座屈性状、等からの比較論的研究である。以上の諸点が明確にされると Gauss 曲面にもとづく分類下の各曲面板の性状や、形状にもとづく特性が明確にされると思われる。

他方建築物としてこれらのタイプの殻は実際に数多く建造されているのであり、多くの学者、研究者により数多くのすぐれた研究がなされてきたとはいえ、まだ構造解析上解決されねばならない重要な問題が多く残されている。例えば地震や風に対する曲面板構造の応答、天窗やダクト等のための開口部の問題、物をつるしたりあるいは爆発物に対するシェルターとして殻を用いるときに生じる集中荷重問題などは解決されねばならないところである。

当論文（論文集と呼ぶべきか）は筆者が大学卒業以来6年半の間に行なってきた曲面板構造に関する理論的、実験的研究のうちより上述の二大意図に共にそったもので且つ理論的研究のみを取り上げて集めたものであるしたがって構造計画のための問題点を全て解明するまでには到底いたらないが、②～⑤までに対応するものである。①に関してはすでに幾多の優れた研究がある。

本書の構成は五部から成っており、第Ⅰ部 殻の振動、第Ⅱ部 円孔を有する殻、第Ⅲ部 集中荷重を受ける殻、第Ⅳ部 殻の *Inextensional* 解について、第Ⅴ部 *H.P* 殻の実用的な解についてである。Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ部ではそれぞれ

Gauss 曲率による三分類の典型として球殻，円筒殻，H  
P 殻を取り上げて検討を行なっており，したがって各部  
共三章より成っている。第Ⅳ部ではその性質上これらの  
曲面板を一緒に論じている。各研究は微小変形理論にも  
とづく弾性理論にしたがっており，等厚 薄肉板を対象  
としている。したがって法線方向応力は無視，平面保持  
の仮定，各部寸法のうち厚さは極度に小さい等の古典理  
論における通常の仮定はそのまま採用している。

各部の各章には序を設け，その研究の意義と内容およ  
び位置付けをくわしく述べているのでここでは内容の概  
略を示すにとどめる。

第Ⅰ部第一章 球殻の振動，では断面力の応力函数表  
示に時間の变化に従う項を導入することによって厳正理  
論解を得，それより近似解を導びき，逆対称振動時の固  
有振動数を求めた。理論式樹立に先立って球殻理論の徹  
底的吟味を行ない完ぺきを期したものである。このよう  
な方法で求められた逆対称時最低次固有振動数は内外で  
初めての貴重な結果であり，ドーム状建築物に今後寄与  
するところが大いといふ。第二章は円筒殻の振動に関  
する既成研究の調査研究であって，この問題に関して  
は既に多くの優れた研究の存在すること，筆者のこれ以  
上の研究は蛇足であることを述べたものであるが，既述  
の目的の助けとし，この部を構成せしめるためここに記  
載した。第三章ではH.P 殻の振動を取り扱い，一般厳正  
解を求めた後，周辺単純支持 4点固定，周辺固定の場



合の固有振動数をライズ、厚さ等の関係において求め、また初期緊張力の影響を明らかにした。個々の問題解決と同時に材料的強度よりも面の剛性から規制される当曲面の設計指針の一助とすることを意図したものである。

第Ⅱ部第一章は円孔を有する球殻であるがわが国においてもこれに関する既往の研究があるので、ここでは筆者独自に解を求め、それを提示するにとどめた。第二章円孔を有する円筒殻では側面に円孔を有する場合の円孔周辺の応力攪乱をとり扱っており、得られた解は建築のみならず圧力容器、航空機、船舶（潜水艦等）等きわめて応用の廣いものである。諸式の極座標表示において変数分離不可の問題を解決し、円孔周辺での応力集中度を数値計算している。第三章円孔を有するH.P.殻では第二章の手法を用いて天窓や釣屋根に近似的に見られる円形境界の解を求め、天窓を有する場合のその周辺の応力状態を数値計算して、その影響を円孔の大きさ、ライズ、厚さ等の関係から論じた。

第Ⅲ部第一章 集中荷重を受ける球殻は球殻の厳正解より頂点（底点）における集中外力（4つのタイプ）に対する解を分離し求めた。既往のものは集中荷重点近傍を扁平球殻と仮定して求められているがここにはそのような仮定のない厳正のものである。第二章集中荷重を受ける円筒殻では第Ⅱ部で得られた解のうち原点における特異解を分離して、円筒側面に垂直に作用する集中荷重に対する近似解を示し、数値計算を行なってその傾向を

示した。この問題に対しては米国で既に二年前偏平殻という仮定のもとで厳正解が示されたが、その表現は Bessel 函数を含むある函数の複素平面上での積分の形のままで行われており、数値計算例はなく、また実際に計算も容易ではない。したがってこの近似解は役に立つものである。第三章では H.P. 殻に集中荷重の作用するときの解を出しており、数値計算を行ない H.P. 殻の特性を明確に示したもので貴重なものと考ええる。

第Ⅳ部では殻の一般的な解からこれら三タイプの性状をさぐろうとするものであり、したがってここではこれらの殻を一括して論じている。ある程度性格が明確にされたと考える。

第Ⅴ部は第Ⅰ部～第Ⅳ部での結果より考えて H.P. 殻について実用解を得たもので、きわめて容易に各種実用的な境界条件に対する応力解析が行なえる。これを用いて曲面のパラメーター（厚さ、ライズ、寸法比等）を少しずつ変化させて設計のための簡便な応力、変形表を作製しておくことは容易に可能であって H.P. 殻の設計に非常に役立つと信ずる。

以上の各研究とも解を求めると共に曲面板の形状に関するパラメーターにしたがって数値計算結果を示しているが、構造計画上の資料とするにはまだまだ不十分である。しかし、もし大型電子計算機を自由に駆使できうればここに示された解を用いて計算を行なうことによって資料をそろえることはできよう。本論文は、その後の展

開は後日を期すことにして、現時点の基礎的段階で一応とりまとめたものであるが、これによって曲面の性状を知るための足がかりになる資料程度は得られたと考えている。

曲面板構造の解析に当って残された数多くの重要な問題のうち若干の問題を解決し、また曲面板設計計画への足がかりをなえることができるものと信じ、これによって少しでも曲面板構造の発展に寄与できることを願うものである。

## 第 I 部 曲面板の振動に関する研究

### 第一章 球殻の振動

#### 序

球殻の動的問題については、ベルドなどを対象とし音響学の観点から古く 19 世紀後半より数多くの研究が行われてきている。しかし、それらは主としてその意図するところから固有振動数のみを求めようとするものばかりで、しかし近年になって建築構造物として（例えば Ray-Dome、アンテナ、圧力容器類など）球殻が用いられるようになると共振問題はもとより耐力、耐震性の点から基礎的振動性状を明確にする必要が生じきつた。

まず既往の研究の調査を行ってみる。1882 年 Lamb は完全球 (Closed sphere) の Extensional 振動<sup>[1]</sup>を、ついで Lord Rayleigh は無歪 (Inextensional) 振動<sup>[2]</sup>をそれぞれエネルギー法で解き、固有振動数を求めた。その後、扁平な球殻が研究の主対象となり、1946 年 Reissner によって微小変形曲げ理論（いわゆる古典理論 Classical bending theory）にもとづいて切平面方向 (longitudinal) 慣性項をも含めた式及び Bessel 函数を用いた解が軸対称振動に対して与えられた。<sup>[3]</sup> つづいて 1955 年 E. Reissner は一般扁平殻の法線方向慣性項のみを考慮したいわゆる transverse 振動の振動数方程式を与えた。<sup>[4]</sup> 変位  $w$  (法線方向)、応力函数  $\phi$  に対して得られた解は種々の境界条件

の場合に用いられ得るものである。だが、数値的結果は与えられておられなかった。これは Bessel 函数を用いた振動数方程式の評価の困難さのためであった。さらに、彼は [13] の後編というべきものを示している。そこでは [4] のディスクッションから推定して longitudinal な慣性項を無視し、軸対称な transverse 振動の数値計算を行なっている。与えられた数値結果は、1) 固定端の最低次固有振動数、2) 固定端自由の場合であり、他に頂点に集中荷重による強制振動が働く場合を論じているが数値計算は行なっていない。1) については Rayleigh-Ritz の方法にもとづく結果との比較を行ない、(ライス/厚さ) が大きくなるにつれて、その相違が大きくなっていくことを図で示している。2) については、平板とそれとの比較を (ライス/厚さ) との関係のもとに論じている。だが、これ以前にも Reissner と行ったやり方で Federhofer が解を与えている<sup>[6]</sup> ことが、三の文献に述べられているが、著者は彼の文献を入手出来ず遺憾ながら詳らかにしない。非軸対称の場合の transverse 振動については、坪井が 1961 年に<sup>[8]</sup> Johnson と Reissner が 1958 年に論文を出している<sup>[7]</sup>。その後 1960 年 Naghdi が、やはり古典曲げ理論 (線型弾性論) に基づく一般偏平殻の動的問題の取り扱いについて、変位  $w$  と応力函数  $\phi$  を用いて論じ<sup>[9]</sup>。これにもとづいて Naghdi と Kalnins が longitudinal 慣性項を含めた軸対称偏平球殻の最低次固有振動数を求め<sup>[10]</sup>、transverse 振動のそれと比較して、最低値の自由振動数においては longitudinal

慣性項の影響の小さいことを述べている。1961年に Hoppmann II がやはり軸対称振動の固有振動数を行列式の根として求められている。<sup>[11]</sup> (最低値の振動数のみならず  $n=3$  までも)。彼は Reissner の結果との比較を行っている。Reissner の結果は約 18% の誤差のあることを指摘している。が、彼のレポートは抄録であるため、どのようにして解を計算したのかは不明である。文献[11]以外はすべて軸対称振動を取り扱ったものであるが、1963年 A. Kalnins が非対称振動の固有振動数の数値結果及びモードを得ることに成功した。<sup>[12]</sup> これはある振動数帯内の全固有振動数を波数曲率、厚さなど、もろもろの値に対して求めたものであった。6個のモードを求められているがモードは longitudinal 或は transverse 変位のいずれかが卓越したものである。又、transverse 振動で得られたモードも決定されている。極座標を用いて表示された3変数(3変位)に対する解は彼の原著[12]から法線方向剪断変形と回転慣性項を無視して算出されている。結果は最低値固有振動数に対して曲率の影響の非常に大きいことが示されている。

扁平な球殻の振動に関する文献は少なく、最もまとまっていたと思われるものとしては、1962年 F.M. Naghdi と A. Kalnins のものがある。<sup>[14]</sup> 彼等は曲げ理論に従って軸対称振動時の (Torsionless) の解を Legendre 函数を用いて厳正に求めた。変位  $w$  と応力函数  $\phi$  を変数とし、longitudinal 慣性項をも考慮している。その上、自由端 (free edge) の場合、最低次固有振動数を行列式の根として求め、ex-

tensional 理論にもとづく固有振動数と大きな差のあることを示した。又 extensional 理論にもとづいて、並対称な振動の場合の振動数方程式を求め、数値計算を行っている。著者が後程示す非対称振動時の解はやはり Legendre 函数を用いて厳正に求められたものであるが、1963年に発表されており、<sup>[15]</sup> ここに微小変形曲げ理論にもとづく外力の無い場合の球殻振動の研究は一応なされるべきことは示されたと見做し得るようになった。

他に振り振動を論じた H. Garnet 他<sup>[16]</sup> 偏平球殻の transverse 振動における uniform stress の影響を論じ、その影響がかなり大きいことを示した R.R. Archer<sup>[17]</sup>、偏平球殻の振動数とモードを実験的に求めた W.H. Hoppmann II. と C.N. Burnett<sup>[18]</sup> 偏平な球殻の並対称振動数の略算を行った坪井、川股<sup>[19]</sup> などの研究がここ2,3年以内に行われている。

ところで今までみてきたように、Lamb や Rayleigh のものは基本仮定そのものが実際状態とかなりちがっており、正しい固有振動数を与えない。Reissner は変位  $w$  に関して6位、応力関数  $\phi$  に関して8位の解を求め、しかし後に不要の解をいくつか、中のいくつかあるものを無視しているが、その基本仮定に従えば応力函数に対する解の数は高々6位であって、この表現は妥当であるとはいえない。P.M. Naghdi の方法は、その根本における検討の不足のため、軸対称以外の振動に適用することは、彼がいうようににはできない。もし行なえば、変位  $w$  応力函数  $\phi$  に関して

して6個の解を得るのみであって、或る境界条件(変位を境界条件とするような場合)においては解が不足することになる。この点 円筒の連対称振動(偏平球殻)も同様であつて、一般的ではない。

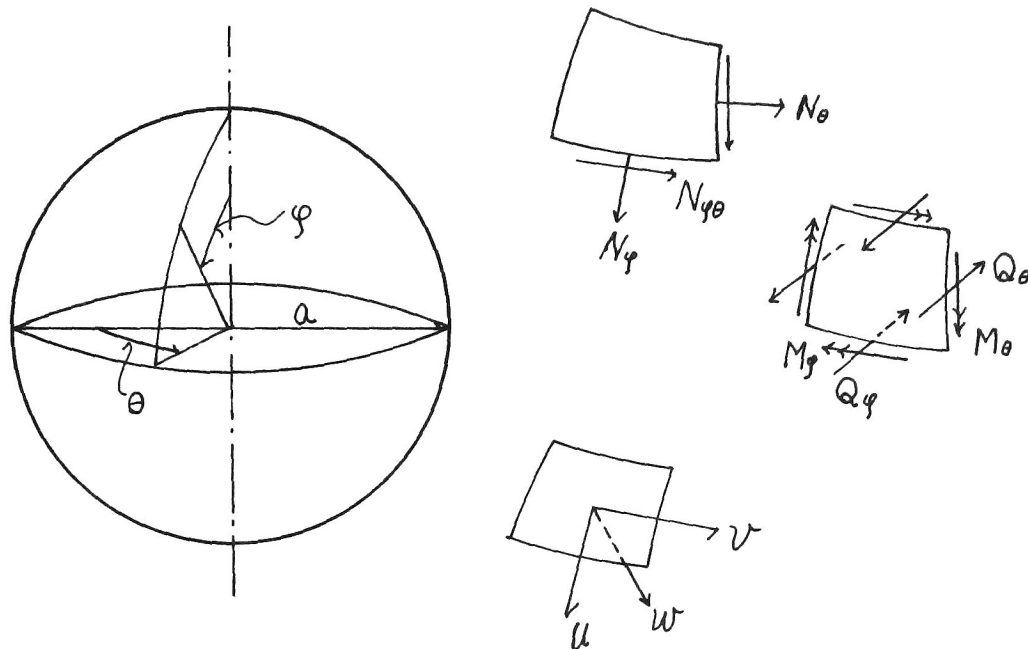
殻の動的性状の解析に対し、いわゆる膜的解と曲げ解の共存する方程式をその主要対象とせねばならぬが、そのためには曲げ解にあらず膜的解についての充分な知識が必要となる。しかし 静的状態の解析においては一般曲げ理論より得られる解のうち膜的解は薄膜解であり換言するの、曲げ解に対する討論はなされてゐるにもかかわらず、一般曲げ理論に含まれる膜的な解の充分な検討がなされてゐると思ふ。特に応力函数を用いた表現においてそうである。球殻の全すべての解を含めた厳正解を導いて A. Havers は薄膜解が曲げ理論における厳正解の一部と一致することから、<sup>[20]</sup> W. Flügge が補足して、やや詳しく述べているが<sup>[21]</sup> 彼等の方法は表現が煩雑になり、そのまゝ動的な場合に拡張する事は困難である。

当論文では、まず用いられるべき基本仮定を明確にした後、静的状態において変数を色々取って、解の性格を明確にし、又、その動的な問題への拡張の便利さを調べた後、応力函数を用いた表現の場合と 変位をもととした未知数を導入した場合の振動時の厳正解を示し、両者の比較検討を行なつて、応力函数表現の場合の解の性質を導き、不足の解等を明確にし、以上で、応力函数表現



と動的な場合に拡張した。応力函数による表現は未知量の表現の必要条件であるが、充分条件ではないからである。しかし又、応力函数表示は不足の解を他より補ってやめる位ならば、もっとも有利な手法だからである。何故ならば他の変位や断面力が応力函数の微分から求めることができ、求めた解から他の必要諸量を積分して求める方法より便利だからである。つぎに厳正解を示し解に対する特性方程式によって固有振動数と振動性状との関係を検討し、既往の各理論との比較検討 Extensional 理論, Inextensional 理論にもとづく固有振動数の不完全さ、法線方向の慣性項のみを考慮することの不完全さの指摘を行なった。又 厳正解は高次の、或は複素数次の Legendre 函数によってあらわされるため数値計算は極めて困難なので、計算容易な近似解を導き、その検討を行なった。振動時の応力函数表示に関する当論文の手法は著者によって独自に導かれたものであるが、似た表示によって軸対称振動に対してあるが P.M. Naghdi が先に論文を出したので<sup>[14]</sup> ここでは彼の不充分な点を補い、非対称振動時の解を出すことを主眼とした。前述の如く厳正解にもとづく固有振動数の数値計算は大型高速電子計算機を必要とし、今の段階では著者にとって困難であるため、著者の近似解を用いて算出した。しかし充分の精度を有すると考えられる。尚 振動数が零の場合は静的な場合の球殻の厳正な一般解と与える。

## 用いられる記号



- $a$  ; 球殻半径  
 $h$  ; 殻厚 (一定)  
 $m$  ; 単位面積当りの重量  $[ML^{-1}T^{-2}]$   
 $g$  ; 重力加速度  $[LT^{-2}]$   
 $\nu$  ; ポアソン比  
 $D$  ; 版剛度  $= Eh^3/12(1-\nu^2)$   
 $k$  ;  $= 12(1-\nu^2)a^2/h^2$   
 $\Omega^2$  ; 固有振動数函数  $= ma^2\omega^2/Ehg$   
 $\omega$  ; 角速度  $[T^{-1}]$   
 $\circ$  ;  $\partial/\partial\varphi$   
 $\circ$  ;  $\partial/\partial\theta$   
 $P_\mu$  ; Legendre function of order  $\mu$  (1st kind)  
 $Q_\mu$  ; Legendre function of order  $\mu$  (2nd kind)

$A_i, B_i, G, H;$  未知積分常数

$\lambda_i;$  解の特性値

$t;$  時間

$C_i^{\pm}(x);$  Gegenbauer function

次の微分演算子を用いる。

$$H_2(A) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} A + \cot \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} A + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} A + 2A$$

$$H_1(A) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} A + \cot \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} A + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} A + (1-\nu)A$$

$$H_0(A) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} A + \cot \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} A + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} A$$

## §1 基本仮定及び諸関係

- ① 等厚シエルとする。
- ② 中性面に対する平面保持。
- ③ 中性面の法線方向の伸縮等の歪を無視。
- ④ 1 に比して  $h/a$  を充分に小さいとする。
- ⑤ 回転慣性項を無視する。

以上の仮定により変形前の中性面の法線上の各層の基本量は中性面のそれと等しい。即ち

$$m_{ij} = g_{ij} \left( 1 - o\left(\frac{h}{a}\right) - o\left(\frac{h^2}{a^2}\right) \right) \longrightarrow m_{ij} = g_{ij}$$

各層歪テンソル

$$\gamma_{ij} = e_{ij} - \chi^3 \left\{ \nabla_j (u^k H_{ki} + w_i) + H_{ji}^k (\nabla_i u_k - H_{ki} w) \right\} \\ + (\chi^3)^2 H^k_{(i} \nabla_{j)} (u^l H_{lk} + w_k)$$

において  $(\chi^3)^2$  の項および  $(\chi^3)$  の項の後半項を無視する。即ち 1 に比して  $o(h/a)$  の誤差を含む。

D'Alembert に基づく運動方程式は曲げ理論より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\sin \varphi \cdot N_{\theta \varphi})' + N_{\theta}' + \cos \varphi \cdot N_{\theta \varphi} - \sin \varphi \cdot Q_{\theta} \\ \quad - \frac{m}{g} a \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2} v = 0 \\ (\sin \varphi \cdot N_{\varphi})' + N_{\varphi}' - \cos \varphi \cdot N_{\theta} - \sin \varphi \cdot Q_{\varphi} \\ \quad - \frac{m}{g} a \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0 \\ (\sin \varphi \cdot Q_{\varphi})' + Q_{\theta}' + \sin \varphi (N_{\theta} + N_{\varphi}) \\ \quad - \frac{m}{g} a \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0 \end{aligned} \right\}$$

----- (1-1 a v c)

$$\left. \begin{aligned} (\sin \varphi \cdot M_{\varphi})^{\circ} + M'_{\theta\varphi} - \cos \varphi \cdot M_{\theta} + a \sin \varphi \cdot Q_{\varphi} &= 0 \\ (\sin \varphi \cdot M_{\theta\varphi})^{\circ} + M'_{\theta} + \cos \varphi \cdot M_{\theta\varphi} + a \sin \varphi \cdot Q_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(1-2 a \sim b)$$

球殻の場合  $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$ ,  $M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta}$  は厳正な関係式より導かれる。従って法線まわりのモーメントの釣合式は恒等的に厳正に満足される。

$$\left. \begin{aligned} e_{\theta} &= (u \cot \varphi + v' / \sin \varphi - w) / a \\ e_{\varphi} &= (u^{\circ} - w) / a \\ e_{\theta\varphi} &= (v^{\circ} - \cot \varphi \cdot v + u' / \sin \varphi) / a \end{aligned} \right\} \text{-----}(1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\theta} &= (w' / \sin^2 \varphi + \cot \varphi \cdot w^{\circ} + w) / a^2 + e_{\theta} / a \\ \kappa_{\varphi} &= (w^{\circ\circ} + w) / a^2 + e_{\varphi} / a \\ \kappa_{\theta\varphi} &= (-\cos \varphi \cdot w' / \sin^2 \varphi + w^{\circ} / \sin \varphi) + e_{\theta\varphi} / a \end{aligned} \right\} \text{---}(1-4)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{\theta} + \nu e_{\varphi}) & N_{\varphi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (e_{\varphi} + \nu e_{\theta}) \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} e_{\theta\varphi} \end{aligned} \right\} (1-5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta} &= D(\kappa_{\theta} + \nu \kappa_{\varphi}) & M_{\varphi} &= D(\kappa_{\varphi} + \nu \kappa_{\theta}) \\ M_{\theta\varphi} &= D \frac{1-\nu}{2} \kappa_{\theta\varphi} \end{aligned} \right\} \text{----}(1-6)$$

適合条件式

$$\begin{aligned} (\sin \varphi \cdot e'_{\theta\varphi})^{\circ} &= (\sin^2 \varphi \cdot e''_{\theta})^{\circ} + e''_{\varphi} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot e''_{\varphi} \\ &\quad + 2 \sin^2 \varphi \cdot e_{\varphi} + \frac{1}{a} \sin^2 \varphi \cdot H_2(w) \end{aligned} \text{----}(1-7)$$

(1-3)・(1-5) の関係から 静的状態時剛体移動に対して歪が零になることがわかり、(1-3)の表現からは不適合の生じないことがわかる。

## §2 静的状態における各種の解法と一般解について 17

(1-1) (1-2) 式において  $\sigma = 0$  の場合を厳正式として用いる。球殻の一般解を論じた A. Havers によって導入され、W. Flügge によっても述べられている<sup>[21]</sup> 解法は、(1-1) を  $u, v, w$  を用いてあらわし、新たに  $u = U^\circ$ ,  $v = V/\sin\varphi$ ,  $V - U = \Omega$ ,  $\Omega^\circ/\sin\varphi = \omega$ ,  $V - w + \frac{1}{2}\omega\sin\varphi = T$  と変数変換を行ない、煩雑な計算の末  $T$  と  $w$  に関する微分方程式を導いている。 $w = S + A^* \cdot R + B^* \cdot \bar{R}$ ,  $T = R + \bar{R}$  とおき解を求めて、 $S$  が Membrane 解だと返している。この  $w, T$  より変位  $u, v$ 、断面力等を求めることはかなり煩雑であるが途中何ら省略もない故厳正解を与える。しかし表現が煩雑故動的問題に拡張するのは不適である。

Airy 型応力函数表示はこれより断面力、変位を求めることが非常に容易であって、動的問題への拡張に最も適していると考えられるのでくわしく吟味を行なう。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{1}{a^2} \left[ \phi''^\circ + \phi - \frac{D}{a} H_2(w) \right] \\ N_\varphi &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{\sin^2\varphi} \phi'' + \cot\varphi \cdot \phi' + \phi - \frac{D}{a} H_2(w) \right] \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{1}{a^2} \left[ -\frac{1}{\sin\varphi} \phi'^\circ + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \cdot \phi' \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

とおく。(1-2, a, b) より下式が得られる。

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -\left(1 + \frac{R^2}{12a^2}\right)^{-1} \left\langle D \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} H_2(w) \right\rangle \\ Q_\theta &= -\left(1 + \frac{R^2}{12a^2}\right)^{-1} \left\langle D \cdot \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} H_2(w) \right\rangle \end{aligned}$$

(2-1) とこれを (1-1.a), (1-1.b) に代入すると恒等的にそれらは成立する。従って (1-1.c) より

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\phi) = 0 \quad \text{-----} \quad (2-2)^{18}$$

適合条件式 (1-7) に (1-3) (1-5) (2-1) を代入して

$$H_2 H_1(\phi) - (1-L) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + E h a H_2(w) = 0 \quad (2-3)$$

従って (2-2), (2-3) 式より,

$$H_2 \left( H_2 H_0 + \frac{E h}{D} a^2 \right) \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0 \quad \text{-----} \quad (2-4)$$

(2-4) 式は下の二式に分解可能である。

$$H_2 \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0 \quad \text{-----} \quad (2-5)$$

$$\left( H_2 H_0 + \frac{E h}{D} a^2 \right) \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0 \quad \text{-----} \quad (2-6)$$

(2-6) の解はこれまで Bending 解として用いられているもので  $(H_0 - A) \cdot (H_0 - B) = 0$  の形に表わされ, この解はそれぞれ又一種, 又二種の Legendre bi-函数であらわされる。この解は既に多くの研究者によって充分に論議されている。  $w$  と  $\phi$  とは one to one の対応のつくことが容易に示され, 結局4個の解が与えられる。従ってここでは (2-5) について論を進める。  $H_2(w) = 0$  に対して常に  $H_2(\phi) = 0$  であることは (2-2) (2-3) 式によって容易に示されるが,  $w$  と  $\phi$  との対応はこれからは定まらない。(2-2), (2-3) 式が各々4階の微分方程式であり, (2-4) が6階のものである。この故より  $w$  と  $\phi$  の間には共通の積分常数と, 独立な積分常数の二種類が出て来る可能性のあることがわかる。尚 (2-2) (2-3) より形式的に  $H_2 H_2 \left( H_2 H_0 + \frac{E h a^2}{D} \right) \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0$  を導いても  $H_2 H_2 \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0$  の解は  $H_2 \left( \frac{w}{\phi} \right) = 0$  の解に還元さ

れる。従って  $w$  と  $\phi$  との関係は適合条件 (2-3) からは決められず改めて歪-変位-応力の関係式を用いて求めねばならない。変位  $u, v$  に対して各軸に対する回転項を無視する。これは一般性を失なわない。  $H_2(w_\phi) = 0$  に対して (2-1), (1-3) より  $e_\phi = e_0$  である。(1-3), (1-5), (2-1) を用いて次の関係式が得られる。

$$\frac{1}{\sin \varphi} (1-n^2) \int (w - \alpha \cdot \phi) d\varphi + \sin \varphi \cdot w'' - \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \phi'' - \alpha \cos \varphi \cdot \phi' - \cos \varphi \cdot w' = 0 \quad (2-7)$$

$$\text{ここに } \alpha = (1+\nu)/Eh\alpha$$

但し  $\phi = \phi_n \cos n\theta$ ,  $w = w_n \cos n\theta$  と展開し,  $w_n \rightarrow w$ ,  $\phi_n \rightarrow \phi$  と書き換えている。もし  $n$  の値にかかわらず  $w$  と  $\phi$  の間に関係があるならば一意的でなければならず, 従って  $\beta\phi = w$  とおくと, (2-7) に代入して  $n \neq 0$  の場合次式を得る。

$$(\beta - \alpha) \left[ \frac{1}{\sin \varphi} (1-n^2) \int \phi d\varphi + \sin \varphi \cdot \phi'' - \cos \varphi \cdot \phi' \right] = 0$$

$$\text{或に} \quad (\beta - \alpha) = 0 \quad \text{或は} \quad \frac{(1-n^2)}{\sin \varphi} \int \phi d\varphi + \sin \varphi \cdot \phi'' - \cos \varphi \cdot \phi' = 0$$

----- (2-8)

が成立することが (2-7) のための必要条件となる。(2-8) の両者の条件式が成立するとき, 特別な場合には前者の条件式を満たす場合もある。即ち一般に (2-8) の両者の条件を満たす場合には, ほぼ同じ解の形のまゝその中的一部分が互いに関係をもち, 他の部分は互いに独立であることを物語っている。従って積分方程式は (2-5) の 2 階微分



方程式から4個得られることになる。

$$\begin{array}{l} H_2(\theta) = 0 \\ H_2(w) = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow \text{膜状態} \quad w = \delta\theta \\ \longrightarrow \text{Inextensional 状態} \quad w \neq \delta\theta \\ \quad \quad \quad (\text{この時 } \theta = 0 \text{ と考える。}) \end{array} \right.$$

(1-4) の後者を満たす解は次のようになる。

$$n=1. \quad \phi = c \sin \varphi$$

$$n=2. \quad \phi = c_1(n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + c_2(n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2}$$

$n=0$  の場合は  $e_\varphi$  より決まる  $u$  と  $e_\theta$  より決まる  $u$  が一致しなくてはならないことより  $e_\varphi \neq 0$  ( $e_\theta = 0$ ) の場合  $w = \delta\theta$  となる。

(2-5) の解を示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} (i) \quad n=0 \quad \phi &= C_1 \cos \varphi + C_2 \left( -\frac{\cos \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} - 1 \right) \\ w &= D_1 \cos \varphi + D_2 \left( \frac{\cos \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} - 1 \right) \end{aligned}$$

$C_1, D_1 \rightarrow N_\theta = N_\varphi = N_{\theta\varphi} = M_\theta = M_\varphi = M_{\theta\varphi} = 0$  . しかし  $e_\theta, e_\varphi$  より  $u \neq 0$  であり、剛体的変位(回転)をあらわしている。 $C_1, D_1$  の間には関係はないが、 $C_1$  は実際上り取り扱いでは出て来ないのでどのような値であってもよい。

$D_2 = \{(1+\nu)/Eh\alpha\} \cdot C_2$  の頂点に集中力の働く場合の解となり、断面力は Membrane 解と一致する (解の内容は III 部参照)。

(1-1a) (1-1b) より別個に  $N_{\theta\varphi} = 0$   $u = 0$  として未知積分定数2個が出て来る。振った場合の時に相当する。

$$(ii) \quad n=1 \quad \phi = [C_1 \sin \varphi + C_2 \left( \frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} + \cot \varphi \right)] \cos \theta$$

$$w = [D_1 \sin \varphi + D_2 \left( \frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} + \cot \varphi \right)] \cos \theta$$

既に示されたように  $C_i, D_i$  の間には対応はなく、又これらより  $N_\theta = N_\varphi = N_{\theta\varphi} = M_\theta = M_{\theta\varphi} = M_\varphi = 0$  となり、又  $u \neq 0$ 、 $v \neq 0$ 、 $w \neq 0$  である。即ち剛体的な変位を表し、且つ  $C_i$  は工学的には無意味となる。

$C_2, D_2$  の間には  $D_2 = \{(1+\nu)/Eha\} C_2$  が成立し、頂裏に水平力が働く場合の解となり諸断面力は Membrane 解と一致する。(解の内容は §III 部参照)。

(iii)  $n \geq 2$

$$\phi = [C_1^n (n + \cos \varphi) \tan^{n-\frac{\varphi}{2}} + C_2^n (n - \cos \varphi) \cot^{n-\frac{\varphi}{2}}] \cos n\theta$$

$$w = [D_1^n (n + \cos \varphi) \tan^{n-\frac{\varphi}{2}} + D_2^n (n - \cos \varphi) \cot^{n-\frac{\varphi}{2}}] \cos n\theta$$

既に示されたように  $C, D$  は互いに一意的な対応はつかない。しかしこの中に  $w=0$  の場合も含まれねばならないから

$$D_1^n = \frac{(1+\nu)}{Eha} C_1^n + D_1^{n*}, \quad D_2^n = \frac{(1+\nu)}{Eha} C_2^n + D_2^{n*}$$

とすると上の  $C_i^n$  を含む項は後述の関係式を用いて

$$u = -\frac{1+\nu}{Eha} C_1^n \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} + n \cot \varphi - \sin \varphi \right) \tan^{n-\frac{\varphi}{2}}$$

$$- \frac{1+\nu}{Eha} C_2^n \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} - n \cot \varphi - \sin \varphi \right) \cot^{n-\frac{\varphi}{2}}$$

$$v = -\frac{1+\nu}{Eha} C_1^n \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} + n \cot \varphi \right) \tan^{n-\frac{\varphi}{2}}$$

$$- \frac{1+\nu}{Eha} C_2^n \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} - n \cot \varphi \right) \cot^{n-\frac{\varphi}{2}}$$

$$-N_\varphi = N_\theta = \frac{n(n^2-1)}{\sin^2 \varphi} (C_1^n \tan^{n-\frac{\varphi}{2}} + C_2^n \cot^{n-\frac{\varphi}{2}})$$

$$N_{\theta\varphi} = - \frac{n(n^2-1)}{\sin^2\varphi} \left( -C_1^n \tan^n \frac{\varphi}{2} + C_2^n \cot^n \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$M_\theta = M_\varphi = M_{\theta\varphi} = 0$$

$$\times \left( \frac{\cos}{\sin} \right) n\theta$$

となり全く Membrane 解と一致する。

$D_1^{n\oplus}, D_2^{n\oplus}$  に関する量は全くた力函数と関係がない。  
しかるに  $u \neq 0, v \neq 0$  が得られ,  $M_\theta \neq 0, M_\varphi \neq 0, M_{\theta\varphi} \neq 0$  も容易に示される。これは Inextensional 状態の解であり、  
この場合は Membrane 解の  $w$  と形は一致する。

以上もとわると未知積分常数の数は次のようになる。

$n=0$  曲げ解4, 膜解1, 剛体変位1, ----  $\phi, w$  より  
膜解1 ( $N_{\theta\varphi} \neq 0$ ), 軸回り回転1 ---- 別個に

合計8個

$n=1$  曲げ解4, 膜解1, 剛体変位1 ----  $\phi, w$  より  
剛体変位1 ( $u, v$  の回転) ----- 別個に

合計7個

$n \geq 2$  曲げ解4, 膜解2, Inexten. 解2 ----  $\phi, w$  より

合計8個

た力函数  $\phi$  変位  $w$  より  $u, v$  を求める方法について述べる。これは振動状態の解析を行なうとき特に大切になる。(1-3) (1-5) より

$$u^c = \frac{1}{E h a} \left[ H_2(\phi) - (1+\nu)\phi - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2(w) + E h u w - (1+\nu)\phi^{90} \right]$$

----- (2-9)

(2-3) より

$$\left. \begin{aligned} H_2(\phi) - (1+\nu)\phi - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2(w) + E h a w &= \xi \\ H_2(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2-10)$$

(2-9), (2-10) より

$$u^0 = \frac{1}{E h a} \{ \xi - (1+\nu) \phi^0 \} \dots (2-10')$$

曲げ解のとき (2-10), (1-10) より  $\xi = 0$ 。故に

$$u = -\frac{1+\nu}{E h a} \phi^0 + f_1(\theta)$$

$$v = -\frac{1+\nu}{E h a} \cdot \frac{1}{\sin \phi} \phi' + f_2(\phi) - \cos \phi \int f_1(\theta) d\theta$$

$f_1, f_2$  一軸まわりつ回転 (全く3次元に取り扱い得る)

膜解のとき  $u = \alpha \phi \rightarrow$  曲げ解の場合と同じ

$u = \alpha \phi \rightarrow$   $\xi \neq 0$ ,  $u, v$  は  $\phi$  と  $w$  より求めねばならない。

以上応力函数表示について示されたが, Inextensional 状態以外では適合条件は恒等的に満たされている事,  $u, v$  は応力函数のみで簡単にあらわせる事, 又  $\nu=1$  の場合解は不足する事等は注目すべき事である。

以上示された2つの手法に基づく解の表現は前者が動の問題への拡張に適せず, 後者は全ての解を含んでいないという欠点があった。ここでは変位を基とした或る函数  $\lambda$  入るが変位を用いた何らの省略のない手法について觀察してみる。この  $\lambda$ , 入は筆者によって始めて提出されるものである。

(1-1), (1-2), (1-3) より法線の釣り合式として次式を得る。

$$\frac{D}{a^3} \left(1 + \frac{\hbar^2}{12a^2}\right)^{-1} H_2 H_0(w) + \frac{E\hbar}{1-\nu} \cdot \frac{1}{a} w - \frac{E\hbar}{1-\nu} \cdot \frac{1}{a} \chi = 0 \quad (2-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } N_\theta + N_\varphi &= \frac{E\hbar}{1-\nu} \cdot \frac{1}{a} \left\langle \frac{1}{\sin\varphi} (\sin\varphi \cdot u)^\circ + \frac{v'}{\sin\varphi} - 2w \right\rangle \\ &\quad \frac{1}{\sin\varphi} (\sin\varphi \cdot u)^\circ + \frac{v'}{\sin\varphi} = \lambda \end{aligned} \right\} (2-12)$$

(1-3) (1-7) (2-12) より

$$H_2 H_1(\lambda) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + E\hbar u H_2(w) = 0 \quad (2-13)$$

(2-11), (2-13) より

$$H_2 \left( H_2 H_0 + \frac{E\hbar a^2}{D} \right) \begin{pmatrix} w \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (2-14)$$

但し  $\left(1 + \frac{\hbar^2}{12a^2}\right)^{-1} \approx 1$  としている。

故に (2-14) を分解して

$$H_2 \begin{pmatrix} w \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (2-15)$$

$$\left( H_2 H_0 + \frac{E\hbar a^2}{D} \right) \begin{pmatrix} w \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (2-16)$$

又 (1-1a) (1-1b) より

$$H_2(\lambda) = 0 \quad (2-17)$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sin\varphi} (\sin\varphi \cdot v)^\circ + \frac{u'}{\sin\varphi} \quad (2-18)$$

$\chi, \lambda$  が決まると (2-12), (2-18) の特解として  $u, v$  が決まりそれにより断面力は決まる。ここでは (2-15) について論じる。 $H_2(u, \chi) = 0$  の場合, (2-13) より  $\chi = 2w$  であり 又  $\chi$  と  $\lambda$  とは互いに独立である。 $u, v$  は ( $\lambda \neq 0$ ), ( $\lambda = 0, \chi \neq 0$ ) の 2 組より求まる。特に  $\lambda = 0, \chi = 0$  の場合は諸関係式を満たさないで解として除外される。  
変形 断面力を求めると  $n=0$  の場合は ( $w, \chi$ ) 表現の場合と一致する。 $n=1$  の場合  $\chi, \lambda$  を求め  $u, v$  を求めると、

$$u = \frac{C_1}{2} \cos\varphi + D_1 - \frac{C_2}{2} \left( \frac{\cos\varphi}{2} \log \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} - 1 - \frac{1}{\sin^2\varphi} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{D_2}{2} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \right) \\
v = & C_1 - \frac{D_1}{2} \cos\varphi + \frac{C_2}{2} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \right) \\
& + \frac{D_2}{2} \left( \frac{\cos\varphi}{2} \log \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} - 1 - \frac{1}{\sin^2\varphi} \right)
\end{aligned}$$

$C_1 = 2D_1 + C_1^*$  とおきかえると  $u, v$  の前半は

$$u = D_1(1+\cos\varphi) + \frac{C_1^*}{2} \cos\varphi \quad v = D_1(1-\cos\varphi) + \frac{C_1^*}{2}$$

となり、 $D_1$  に関する項は Inextensional な状態の解である。

$D_2$  に関しては  $w=0$ 。このとき Membrane 解を与えるが、(特異解 第三部参照) これは  $(w, \varphi)$  表現では与えられなかったものである。未知積分定数は計 8 個出て来る。尚この場合に対応する応力函数  $\varphi$  の形を求めると、 $\varphi = -1/\sin\varphi$  であってこれは  $H_0(\varphi)=0$  の解となり、確かに  $(w, \varphi)$  表現ではあらわれて来ない。  $n \geq 2$  の場合

$$\begin{aligned}
X = & 2C_1^n (n+\cos\varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + 2C_2^n (n-\cos\varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \\
\chi = & 2D_1^n (n+\cos\varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + 2D_2^n (n-\cos\varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

これより  $u, v$  を求め  $C_1^n = -D_1^n + C_1^{n*}$ ,  $C_2^n = D_2^n + C_2^{n*}$  と置きかえると

$$\begin{aligned}
w = & -D_1^n (n+\cos\varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + D_2^n (n-\cos\varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \\
& + C_1^{n*} (n+\cos\varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + C_2^{n*} (n-\cos\varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \\
u = & -D_1^n \sin\varphi \tan^n \frac{\varphi}{2} - D_2^n \sin\varphi \cot^n \frac{\varphi}{2} \\
& - C_1^{n*} \left( n^2 \frac{1}{\sin\varphi} + n \cot\varphi - \sin\varphi \right) \tan^n \frac{\varphi}{2} + C_2^{n*} \left( n^2 \frac{1}{\sin\varphi} - n \cot\varphi - \sin\varphi \right) \\
& \times \cot^n \frac{\varphi}{2} \\
v = & -D_1^n \sin\varphi \tan^n \frac{\varphi}{2} + D_2^n \sin\varphi \cot^n \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}$$

$$+ C_1^{n*} \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} + n \cot \varphi \right) \tan^n \frac{\varphi}{2} + C_2^{n*} \left( \frac{n^2}{\sin \varphi} - n \cot \varphi \right) \cot^n \frac{\varphi}{2}$$

ところで  $D_1^n$ ,  $D_2^n$  に関するものより  $N_\theta = N_\varphi = N_{\theta\varphi} = 0$ ,  $M_\varphi \neq 0$ ,  $M_\theta \neq 0$ ,  $M_{\theta\varphi} \neq 0$  となり Inexten. 解をあらわす。  $C_1^{n*}$ ,  $C_2^{n*}$  より Mumb. 解と一致するものが与えられる。これらの表現は  $(w, \varphi)$  表現と一致する。

尚直接に断面力 (例えば  $N_\varphi$ ) と変位  $w$  を用いても全く同様な解を得ることが出来るが  $N_\varphi$  の未知常数と  $w$  のそれとの関係を決定することが非常に困難であって、動的な場合に拡張することは不適である。

以上述べられたいずれの方法を用いても球殻の解はあらわされ、定めて動的な場合に拡張することは可能であるが、 $(w, \varphi)$  表現以外は他の変位、断面力を求める事は困難なので、変位をもととした手法を動的な場合に、用いない方がよいと思われる。

### §3 振動時の解の表現

前節で動的な場合には  $(w, \varphi)$  表現が最適であること、しかしこの場合全ての解が含まれていない事が明確になった。従って先ず  $(w, \varphi)$  表現で解を求め、しかる後、 $\lambda$  を用いて同様に求め、両者の比較を行なって不足の解を  $\lambda$  入表現から補うものとする。

静的な場合におけるた力函数表示 (2-1) から類推して断面力のた力函数表示を次の様に置く。

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{a^2} \left( \psi'''' + \psi - \frac{1}{a} D H_2(\psi) + \phi \right) \\ N_\psi &= \frac{1}{a^2} \left( \frac{\psi'''}{\sin^2 \varphi} + \cot \varphi \cdot \psi'' + \psi - \frac{1}{a} D H_2(w) + f \right) \\ N_{\phi\psi} &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\psi'''}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \psi' + g \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ここに  $\phi, f, g$  は  $\psi$  の振動数に関する函数であつて、静的状態において  $\phi = f = g = 0$  となるべきものである。

さて、 $\phi, f, g$  は  $\psi$  の時間に関する変化率の力に及ぼす影響を意味するものであり、 $N_\phi, N_0$  に対して同質でなければならぬ故、 $\phi = f$  とおける。(3-1) を (1-1 a, b) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} -\sin \varphi \cdot g'' - 2 \cos \varphi g' + \phi' - A \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= 0 \\ \sin \varphi \cdot \phi'' - g' - A \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

但し  $(1 + \frac{\hbar^2}{12 a^2})^{-1} \approx 1, \quad A = \frac{2\hbar}{g} a^3$

(3-2) より  $g$  を消去し、(1-3) を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos \varphi} \psi'''' + \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right) \psi'' + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \psi' - \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \psi'''' \\ & + \frac{A(1+\nu)}{E \hbar a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} \psi'''' + \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right) \psi'' + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \psi' - \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \psi'''' \right\} \\ & - \frac{2A}{E \hbar a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ H_1(\psi) + (1-\nu)\phi - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2(w) + E \hbar a w \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

故に  $\psi$  に関する一つの特解として

$$H_1(\psi) + (1-\nu)\phi - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2(w) + E \hbar a w = 0 \quad (3-4)$$

であるとき次の様に置ける。

$$\phi = -\frac{(1+\nu)A}{E \hbar a} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi \quad (3-5)$$



(3-4)が成立しない時の他の特解は $w$ と $\psi$ の両方に関係する為、容易には決われない。従って今(3-5)の場合について論を進める。(3-5)(3-3)(1-3)より

$$u = -(1+\nu)/E\hbar a \cdot \psi^0 \quad (3-6.a)$$

これを(3-2)に代入すると $\sigma=0$  及  $w$

$$v = -(1+\nu)/E\hbar a \cdot \psi'/\sin f \quad (3-6.b)$$

が得られ、又(1-3)より  $w = k \cdot \psi$  ( $k$ : 或る常数) となる。ところで(3-6)が成立するのは §2で示された如く静的な場合では *Inexten.* 状態以外の場合であって、上述の場合振動数を零にすると静的状態に接続せねばならない事より(3-5)のみを採用すると全ての解を含んでいるとは云々ない事、しかし不足の解は静的な場合 *Inexten.* 解及び  $n=1$  においては、力函数表示で抜けていたものであることが §2と対応せしめるとわかる。消動的状態では *Inexten.* 状態は存在しない。さて、(3-1), (3-5)を適合条件(1-7)に代入すると(3-6), (1-3), (1-5)より(1-7)は恒等的に成立する事は静的な場合に既に示された通りである。従って( $w, \psi$ )の微分方程式は8階よりも低階であらわされることになる。P.M. Naghdiは(3-5)と同じものを用いているがこのような論議を行っていないので適合条件をとめまゝ用い、後程余分の解を捨てており論理的でなく、非対称振動問題では直ちに困難に直面すると思われる。(1-2)(1-5)(3-1)より次式が得られる。

$$H_1(\psi) - \frac{(1-\nu)A}{E\hbar a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2(w) + E\hbar a \cdot w = 0 \quad (3-7)$$

(3-7)は(3-5)を代入した(3-4)と一致する。従って(3-7)を $(w, \psi)$ の関係式として採用する。(適合条件式(1-7)は恒等的に満たされているので)。他方(1-1c)に(3-5), (3-7)を代入して

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\psi) + \frac{(1+\nu)}{E h D} A \left( 2 - \frac{h^2}{12 a^2} H_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \frac{a A}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0 \quad (3-8)$$

$\psi = \psi_0 e^{i\omega t}$ ,  $w = w_0 e^{i\omega t}$  と変数分離を行ない,  $\psi_0 \rightarrow \psi$ ,  $w_0 \rightarrow w$  と書き換えると(3-7), (3-8)より,

$$[H_2 H_2 H_0 + (1-\nu^2) \Omega^2 H_2 H_0 + k(1-\Omega^2) H_2 + k(3+3\nu) \Omega^2 - (1-\nu^2) k \Omega^4] \psi = 0 \quad (3-9)$$

ここに  $\Omega^2 = \frac{m a^2}{E h g} \omega^2$ ,  $k = 12(1-\nu^2) \frac{a^2}{h^2}$  である。

不足の解を調べるために  $\chi, \lambda$  を用いて諸式を表わすと

$$[H_2 H_2 H_0 + (1-\nu^2) \Omega^2 H_2 H_0 + k(1-\Omega^2) H_2 + k(3+3\nu) \Omega^2 - (1-\nu^2) k \Omega^4] \left\{ \frac{\chi}{w} \right\} = 0 \quad (3-10)$$

$$\text{及 } w \quad H_2(w) - \frac{2(1+\nu)}{E h a} A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \lambda = 0 \quad (3-11)$$

となる。(3-10), (3-11)は全く独立に導かれたものであり,  $\chi, \lambda$  は(2-12), (2-18)でそれと等しくされる。(3-10)の $\chi$ と $w$ とは  $w = k \chi$  ( $k$ : 或る常数)であらわされる。(3-9)と(3-10), (3-11)の対応を調べる。既に示された如く

$$u = k \psi^0, \quad v = k \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \psi'$$

これを $\lambda$ の表示式に代入すると $\lambda = 0$ が成立する。 $\lambda$ の表示式に代入すると $\chi \neq 0$  であって

$$k \left\{ \psi'' + \cot \varphi \cdot \psi' + \frac{\psi''}{\sin^2 \varphi} \right\} = \chi \quad (3-12)$$

と云うで(3-9)の解 $\psi$ と(3-10)の解 $\chi$ とは同じ形であって

$$\psi'' + \cot \varphi \cdot \psi' + \frac{\psi''}{\sin^2 \varphi} + 2\psi + \chi \psi = 0$$

が満足される。故に(3-12)と比較して  $-K(2+\alpha)\psi = \chi$  となり  $-K(2+\alpha)$  は常数故  $\psi$  と  $\chi$  は同形で(3-12)が成立し一意に対応することがわかる。従って  $(w, \phi)$  表現では  $\chi \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  の場合と一致する。(3-11)より得られる2個の解(この時  $\chi = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ )が補完められれば(3-9)と共に動的な場合の全ての解が得られることになる。尚、(3-11)の解が  $(w, \phi)$  表現からは得られないものであることを示す。  
 $v = -A^0$ ,  $u = A'/\sin\varphi$  とおくと(2-12)に入れて  $\chi = 0$ 。(2-18)に代入すると  $A'' + \cot\varphi A' + A'/\sin^2\varphi = \lambda$  の特解として  $A$  は決まる。それにより  $u, v$  は決定される。そこで  $A$  も同様に Legendre 函数であらわされるので一般に  $A^0 = -\psi/\sin\varphi$  或は  $\psi^0 = -A/\sin\varphi$  には存しない。従って応力函数表示では得られない。

(3-9)を書き換えると

$$(H_0 - \lambda_1)(H_0 - \lambda_2)(H_0 - \lambda_3)\psi = 0 \quad (3-13)$$

この解は一般に

$$\psi = \sum_{i=1}^3 [C_i^n P_{\mu_i}^n(\cos\varphi) + D_i^n Q_{\mu_i}^n(\cos\varphi)] \cos n\theta \quad (3-14)$$

$$\mu_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

$\lambda_i$  は次式で与えられる。

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} \{ 4 + (1-\nu^2)\Omega^2 \} + (m+n)$$

$$\{\lambda_2\} = -\frac{1}{3} \{ 4 + (1-\nu^2)\Omega^2 \} - \frac{1}{2}(m+n) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(m-n)$$

$$\{\mu_n\} = \left[ -\frac{2}{3} \pm \Delta^{1/2} \right] \quad \Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$p \doteq -\frac{1}{3} \cdot (1-\nu^2)\Omega^4 - k\Omega^2 + k$$

$$z \doteq \frac{2}{27}(1-\nu^2)^3 \Omega^6 - \frac{2}{3}(1-\nu^2)k\Omega^4 + \frac{1}{3}(6+4\nu+\nu^2)k\nu^2 + \frac{2}{3}k + \frac{128}{27}$$

ところで  $\lambda_i$  が等根をとる場合、例えば  $\lambda_1 = \lambda_2$  の場合には、これに対応する解は

$$\psi = C_1^n P_{\mu_1}^n(\cos \varphi) + D_1^n Q_{\mu_1}^n(\cos \varphi) + (\tan^n \frac{\varphi}{2}) C_2^n P_{\mu_1}^n(\cos \varphi) + (\tan^n \frac{\varphi}{2}) D_2^n Q_{\mu_1}^n(\cos \varphi) \quad (3-16)$$

となる。三重根の場合は起り得ない事が (3-15) から容易にわかる。複素根を取る場合  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  とすると

$$\mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\alpha) + \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\alpha)^2 + \frac{\beta^2}{4}}} - i\sqrt{-\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\alpha) + \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\alpha)^2 + \frac{\beta^2}{4}}}$$

となり、 $P_{\mu}^n, Q_{\mu}^n$  は複素数値をとる。

Legendre 関数  $P_{\mu}^n(\cos \varphi), Q_{\mu}^n(\cos \varphi)$  は  $\mu$  が整数或は  $|\mu| \leq 2$  の実数の場合、数表が与えられているが一般には Gegenbauer 函数として超幾何級数により数値計算を行なうか、積分により近似計算を行なって求めねばならない。或いは漸化関係式を用いて、 $|\mu| < 2$  なるように order を低下せしめて数表より求める。Gegenbauer 函数の場合、 $(H_0 - \lambda_1)\psi = 0$  の解は次の様になる。

$$\psi = (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} C_{\mu}^{\nu}(x) \quad C_{\mu}^{\nu}(x) = \frac{\Gamma(\mu+2\nu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\nu)} F(-\mu, \mu+2\nu, \nu+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2})$$

ここに  $\nu = \frac{1+2n}{2}, \lambda = \frac{\lambda_1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}(2n+1+\sqrt{1-4\lambda_1}), x = \cos \varphi$   
積分表示では次のようになる。

$$P_{\mu}^n(\cos \varphi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^n \varphi}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \int_0^{\varphi} \frac{\cos(\mu+\frac{1}{2})\phi}{(\cos \phi - \cos \varphi)^{n+\frac{1}{2}}} d\phi$$

また  $\lambda_1$  が大であると、 $\mu = -\frac{1}{2} + i\epsilon$  の形となり、この場合の Legendre 函数は円錐函数と呼ばれ、<sup>[23]</sup> 数値計算は容易である。

応力函数表示で不足した解(3-11)は次の様になる。 $\mu = \psi / \sin \varphi$ ,  $\nu = -\psi^\circ$  とおくと  $\chi = 0$  は満たされ, (2-18)より

$$\psi'' + \cot \varphi \cdot \psi' + \frac{\psi''}{\sin^2 \varphi} = \lambda$$

(3-11)より

$$\lambda = G'' P_\mu''(\cos \varphi) + H'' Q_\mu''(\cos \varphi), \quad \mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} + 2(1+\nu)\Omega^2}$$

故に

$$\psi = -\frac{1}{2(1+\nu)\Omega^2 + 2} \lambda = -\frac{1}{2(1+\nu)\Omega^2 + 2} (G'' P_\mu''(\cos \varphi) + H'' Q_\mu''(\cos \varphi))$$

改めて  $-1/\{2(1+\nu)\Omega^2 + 2\} \times G'' = G''$ ,  $-1/\{2(1+\nu)\Omega^2 + 2\} \times H'' = H''$  とおくと  $\psi = G'' P_\mu''(\cos \varphi) + H'' Q_\mu''(\cos \varphi)$  となる。この場合  $w = 0$  である。尚この解は  $e_\theta = -e_\varphi$  キロ を与えるので無応力状態ではない。

#### §4 厳正解

$\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) ; (3-15) で与えられる。  $\mu_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} - \lambda_i}$

$\lambda_4$  ;  $-(2 + 2(1+\nu)\Omega^2)$ ,  $\mu_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} + 2(1+\nu)\Omega^2}$

$$C_i = \frac{1}{E h a} \cdot \frac{\lambda_i + (1-\nu) + (1-\nu^2)\Omega^2}{(1-\nu)(\lambda_i + 2)/k - 1}$$

$n=0$  における振り振動は含まれない。

変位

$$u = \left[ -\frac{1+\nu}{E h a} \sum_{i=1}^3 (A_i P_{\mu_i}'' + B_i Q_{\mu_i}'') + \frac{n}{\sin \varphi} (G P_{\mu_4}'' + H Q_{\mu_4}'') \right] \cos n\theta$$

$$v = \left[ -\frac{1+\nu}{E h a} \sum_{i=1}^3 \frac{n}{\sin \varphi} (A_i P_{\mu_i}'' + B_i Q_{\mu_i}'') - (G P_{\mu_4}'' + H Q_{\mu_4}'') \right] \sin n\theta$$

$$w = \sum_{i=1}^3 C_i (A_i P_{\mu_i}'' + B_i Q_{\mu_i}'') \cos n\theta$$

--- (4-1)

断面力

$$N_{\theta} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i \left\{ P_{\mu_i, \varphi}^n + \left( 1 - (1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right) P_{\mu_i}^n \right\} \right. \\ \left. + B_i \left\{ Q_{\mu_i, \varphi}^n + \left( 1 - (1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right) Q_{\mu_i}^n \right\} \right] \cos n\theta \\ - \frac{nEr}{a(1+\nu)} \left\{ \left( \frac{P_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4}^n \right) G + \left( \frac{Q_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4}^n \right) H \right\} \cos n\theta$$

$$N_{\varphi} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i \left\{ \cot \varphi \cdot P_{\mu_i, \varphi}^n + \left( 1 - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} - (1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right) P_{\mu_i}^n \right\} \right. \\ \left. + B_i \left\{ \cot \varphi \cdot Q_{\mu_i, \varphi}^n + \left( 1 - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} - (1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right) Q_{\mu_i}^n \right\} \right] \cos n\theta \\ + \frac{nEr}{a(1+\nu)} \left\{ \left( \frac{P_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4}^n \right) G + \left( \frac{Q_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4}^n \right) H \right\} \cos n\theta$$

$$N_{\varphi\theta} = \frac{n}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i \left( \frac{P_{\mu_i, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i}^n \right) + B_i \left( \frac{Q_{\mu_i, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i}^n \right) \right] \sin n\theta \\ - \frac{Er}{a(1+\nu)} \left[ G \left\{ P_{\mu_4, \varphi}^n + \left( 1 + (1+\nu)\Omega^2 \right) P_{\mu_4}^n \right\} + H \left\{ Q_{\mu_4, \varphi}^n + \left( 1 + (1+\nu) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \Omega^2 \right) Q_{\mu_4}^n \right\} \right] \sin n\theta$$

$$M_{\theta} = \frac{D}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( \nu P_{\mu_i, \varphi}^n + \cot \varphi P_{\mu_i, \varphi}^n - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i}^n \right) \right. \\ \left. + B_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( \nu Q_{\mu_i, \varphi}^n + \cot \varphi Q_{\mu_i, \varphi}^n - \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i}^n \right) \right\} \cos n\theta \\ - \frac{(1-\nu)Dn}{a^2} \left\{ \left( \frac{P_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4}^n \right) G + \left( \frac{Q_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4}^n \right) H \right\} \cos n\theta$$

$$M_{\varphi} = \frac{D}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( P_{\mu_i, \varphi}^n + \nu \cot \varphi P_{\mu_i, \varphi}^n - \nu \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i}^n \right) \right. \\ \left. + B_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( Q_{\mu_i, \varphi}^n + \nu \cot \varphi Q_{\mu_i, \varphi}^n - \nu \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i}^n \right) \right\} \cos n\theta \\ + \frac{(1-\nu)Dn}{a^2} \left\{ \left( \frac{P_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4}^n \right) G + \left( \frac{Q_{\mu_4, \varphi}^n}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4}^n \right) H \right\} \cos n\theta$$

$$M_{\varphi\theta} = \frac{(1-\nu)Dn}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i}^n - \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu_i, \varphi}^n \right) \right. \\ \left. + B_i \left( c_i - \frac{1+\nu}{Er a} \right) \left( \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i}^n - \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu_i, \varphi}^n \right) \right\} \sin n\theta - \frac{(1-\nu)D}{a^2} \times \\ \times \left[ G \left\{ P_{\mu_4, \varphi}^n + \left( 1 + (1+\nu)\Omega^2 \right) P_{\mu_4}^n \right\} + H \left\{ Q_{\mu_4, \varphi}^n + \left( 1 + (1+\nu)\Omega^2 \right) Q_{\mu_4}^n \right\} \right] \sin n\theta$$

$$Q_{\theta} = \frac{n}{a^2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sin \varphi} \left[ A_i \left\{ \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i - \frac{k^2}{12a^2}(1+\nu)\Omega^2 \right\} P_{\mu_i}^n + B_i \left\{ \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k^2}{12a^2}(1+\nu)\Omega^2 \right\} Q_{\mu_i}^n \right] \sin n\theta - \frac{(1-\nu^2)D}{a^3} \Omega^2 (G P_{\mu_4, \varphi}^n + H Q_{\mu_4, \varphi}^n) \sin n\theta$$

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i \left\{ \frac{k^2}{12a^2}(1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + 2)c_i \right\} P_{\mu_i, \varphi}^n + B_i \left\{ \frac{k^2}{12a^2}(1+\nu)\Omega^2 - \frac{D}{a}(\lambda_i + \right. \right. \\ \left. \left. + 2)c_i \right\} Q_{\mu_i, \varphi}^n \right] \cos n\theta + \frac{(1-\nu^2)D}{a^3} \frac{n}{\sin \varphi} \Omega^2 (G P_{\mu_4}^n + H Q_{\mu_4}^n) \cos n\theta$$

----- (4-2)

ここに

$$P_{\mu}^n = P_{\mu}^n(\cos \varphi), \quad Q_{\mu}^n = Q_{\mu}^n(\cos \varphi), \quad P_{\mu, \varphi}^n = \frac{d}{d\varphi} P_{\mu}^n, \quad P_{\mu, \varphi\varphi}^n = \frac{d^2}{d\varphi^2} P_{\mu}^n$$

特に  $n=1$  の場合に (3-1), (3-2) を書き直すと,

$$u = \left\{ -\frac{1+\nu}{Eka} \cdot \sum_{i=1}^3 [A_i \{ (\mu_i - \cot^2 \varphi) P_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i+1} \} + B_i \{ (\mu_i - \cot^2 \varphi) \right. \\ \left. \cdot Q_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i+1} \} ] (1+\mu_i) + \frac{1}{Eka(1+\mu_4)} [ G \{ \cot \varphi P_{\mu_4} - \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu_4+1} \} \right. \\ \left. + H \{ \cot \varphi Q_{\mu_4} - \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu_4+1} \} ] \frac{1}{\sin \varphi} \right\} \cos \theta$$

$$v = \left\{ -\frac{1+\nu}{Eka} \cdot \sum_{i=1}^3 \{ A_i (\cos \varphi P_{\mu_i} - P_{\mu_i+1}) + B_i (\cos \varphi Q_{\mu_i} - Q_{\mu_i+1}) \} (1+\mu_i) \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{Eka(1+\mu_4)} [ G \{ (\mu_4 - \cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4+1} \} + H \{ (\mu_4 - \cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4+1} \} ] \right\} \sin \theta$$

$$w = \sum_{i=1}^3 C_i (1+\mu_i) \{ A_i (\cot \varphi P_{\mu_i} - \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu_i+1}) + B_i (\cot \varphi Q_{\mu_i} - \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu_i+1}) \} \cos \theta$$

$$N_{\theta} = \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 (1+\mu_i) [ A_i \left\{ \left( \frac{2}{\sin^2 \varphi} - 2\mu_i - \mu_i^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) - (1+\nu) \Omega^2 \right) \right. \right. \\ \left. \times \cot \varphi P_{\mu_i} + \left( \mu_i (\mu_i + 1) - \frac{2}{\sin^2 \varphi} + \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) + (1+\nu) \Omega^2 \right) \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu_i+1} \right\} \\ \left. + B_i \left\{ \left( \frac{2}{\sin^2 \varphi} - 2\mu_i - \mu_i^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) - (1+\nu) \Omega^2 \right) \cot \varphi Q_{\mu_i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \mu_i (\mu_i + 1) - \frac{2}{\sin^2 \varphi} + \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) + (1+\nu) \Omega^2 \right) \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu_i+1} \right\} \right] \\ \left. - \frac{1}{a^2(1+\nu)} \cdot \frac{1+\mu_4}{\sin \varphi} [ G \{ (\mu_4 - 2 \cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4+1} \} + H \{ (\mu_4 - 2 \cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4+1} \} ] \right\} \cos \theta$$

$$N_{\varphi} = \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 (1+\mu_i) [ A_i \left\{ (\mu_i - 2 \cot^2 \varphi - (1+\nu) \Omega^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2)) \cot \varphi \right. \right. \\ \left. \times P_{\mu_i} + \left( -(1+\nu) \Omega^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) \right) \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu_i+1} \right\} + B_i \left\{ (\mu_i - 2 \cot^2 \varphi - (1+\nu) \Omega^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2)) \cot \varphi \right. \\ \left. \times Q_{\mu_i} + \left( -(1+\nu) \Omega^2 - \frac{D}{a} C_i (\lambda_i + 2) \right) \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu_i+1} \right\} \\ \left. + \frac{1}{a^2(1+\nu)} \cdot \frac{1+\mu_4}{\sin \varphi} [ G \{ (\mu_4 - 2 \cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4+1} \} + H \{ (\mu_4 - 2 \cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4+1} \} ] \right\} \sin \theta$$

$$N_{\theta\varphi} = \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 (1+\mu_i) [ A_i \{ (\mu_i - 2 \cot^2 \varphi) P_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i+1} \} + B_i \{ (\mu_i - 2 \cot^2 \varphi) \right.$$

$$\times Q_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_{i+1}} \Big] \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{a^2(1+\nu)} (1+\mu_4) \Big[ G \Big\{ \left( -\frac{2\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - (2\mu_4 + \mu_4^2 - (1+\nu)\Omega^2) \cot \varphi \right) P_{\mu_4} + \left( \frac{\mu_4(\mu_4+1)}{\sin \varphi} - \frac{2}{\sin^3 \varphi} \right) P_{\mu_4+1} \Big\} + H \Big\{ \left( \frac{2\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - (2\mu_4 + \mu_4^2 - (1+\nu)\Omega^2) \cot \varphi \right) Q_{\mu_4} + \left( \frac{\mu_4(\mu_4+1)}{\sin \varphi} - \frac{2}{\sin^3 \varphi} \right) Q_{\mu_4+1} \Big\} \Big] \sin \theta$$

$$M_\theta = \left[ \frac{D}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left( c_i - \frac{1+\nu}{Eka} \right) (1+\mu_i) \left[ A_i \left\{ \left( \mu_i(1-2\nu-\nu\mu_i) \cot \varphi - (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) \right. \right. \right. \\ \times (1+\cos^2 \varphi) \Big\} P_{\mu_i} + \left. \left( \frac{1-\nu}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) + \mu_i(\mu_i+1) \frac{1}{\sin \varphi} \right) P_{\mu_i+1} \right\} + B_i \left\{ \left( \mu_i(1-2\nu-\nu\mu_i) \cot \varphi - (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) \right) \right. \\ \times Q_{\mu_i} + \left. \left( \frac{1-\nu}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) + \mu_i(\mu_i+1) \frac{1}{\sin \varphi} \right) Q_{\mu_i+1} \right\} \Big] - \frac{(1-\nu)D}{Eka^3} \left[ G \left\{ (\mu_4 - 2\cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} P_{\mu_4+1} \right\} \right. \\ \left. + H \left\{ (\mu_4 - 2\cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} Q_{\mu_4+1} \right\} \right] \frac{(1+\mu_4)}{\sin \varphi} \Big] \cos \theta$$

$$M_y = \left[ \frac{D}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left( c_i - \frac{1+\nu}{Eka} \right) (1+\mu_i) \left[ A_i \left\{ \left( (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) + \mu_i(\nu-2-\mu_i) \right) \right. \right. \right. \\ \times (\mp \varphi) P_{\mu_i} + \left. \left( \mu_i(\mu_i+1) \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1-\nu}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) \right) P_{\mu_i+1} \right\} + B_i \left\{ \left( (1-\nu) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) + \mu_i(\nu-2-\mu_i) \cot \varphi \right) \right. \\ \times Q_{\mu_i} + \left. \left( \mu_i(\mu_i+1) \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1-\nu}{\sin^3 \varphi} (1+\cos^2 \varphi) \right) Q_{\mu_i+1} \right\} \Big] + \frac{1-\nu}{Eka^3} D \left[ G \left\{ (\mu_4 - 2\cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + 2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} P_{\mu_4+1} \right\} + H \left\{ (\mu_4 - 2\cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} Q_{\mu_4+1} \right\} \right] \frac{(1+\mu_4)}{\sin \varphi} \Big] \cos \theta$$

$$M_{\theta\varphi} = \left\{ \frac{(1-\nu)D}{a^2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1+\nu}{Eka} - c_i \right) (1+\mu_i) \left[ A_i \left\{ (\mu_i - 2\cot^2 \varphi) P_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} P_{\mu_i+1} \right\} \right. \right. \\ \left. + B_i \left\{ (\mu_i - 2\cot^2 \varphi) Q_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} Q_{\mu_i+1} \right\} \right] \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{(1-\nu)D}{Eka^3} (1+\mu_4) \left[ G \left\{ \left( -\frac{2\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (2\mu_4 + \mu_4^2 - (1+\nu)\Omega^2) \cot \varphi \right) P_{\mu_4} + \left( \frac{\mu_4(\mu_4+1)}{\sin \varphi} - \frac{2}{\sin^3 \varphi} \right) P_{\mu_4+1} \right\} + H \left\{ \left( \frac{2\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - (2\mu_4 + \mu_4^2 - (1+\nu)\Omega^2) \cot \varphi \right) \right. \\ \left. \times Q_{\mu_4} + \left( \frac{\mu_4(\mu_4+1)}{\sin \varphi} - \frac{2}{\sin^3 \varphi} \right) Q_{\mu_4+1} \right\} \Big] \Big\} \sin \theta$$

$$Q_\varphi = \left[ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 (1+\mu_i) \left[ A_i (\mu_i - \cot^2 \varphi) P_{\mu_i} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_i+1} \right] + B_i (\mu_i - \cot^2 \varphi) Q_{\mu_i} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_i+1} \right] \left[ \frac{k^2}{12a^2} (1+\nu) \Omega^2 - \frac{D}{a} (\lambda_i+2) c_i \right] \\ + \frac{k^2}{12a^2} \Omega^2 \frac{(1+\mu_4)}{\sin^2 \varphi} \left[ G (\cos \varphi P_{\mu_4} - P_{\mu_4+1}) + H (\cos \varphi Q_{\mu_4} - Q_{\mu_4+1}) \right] \Big] \cos \theta$$

$$\theta = \left[ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 \frac{1+\mu_i}{\sin^2 \varphi} \left[ A_i (\cos \varphi P_{\mu_i} - P_{\mu_i+1}) + B_i (\cos \varphi Q_{\mu_i} - Q_{\mu_i+1}) \right] \left( \frac{D}{a} (\lambda_i+2) c_i - \frac{k^2}{12a^2} (1+\nu) \right. \right. \\ \left. \left. \times \Omega^2 \right) - \frac{k^2}{12a^2} \Omega^2 (1+\mu_4) \left[ G \left\{ (\mu_4 - \cot^2 \varphi) P_{\mu_4} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} P_{\mu_4+1} \right\} + H \left\{ (\mu_4 - \cot^2 \varphi) Q_{\mu_4} + \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} Q_{\mu_4+1} \right\} \right] \right] \\ \times \sin \theta$$



## §5 固有振動数について

強制振動において問題となる共鳴現象においては自由振動による固有振動数が問題となる。故にここに自由振動の固有振動数を求める方法を示す。境界条件は  $y=y_1$

$y=y_2$  の 2ヶ所の境界で各々 4 個計 8 個満足されなければならない。上部 (或は下部) に閉じた球殻では解のうち頂角で *regular* でないものを零として計 4 個の境界条件を満足しなければならないことになる。境界条件は変位と断面力であらわし得るから一般に 8 個の未知積分常数につき線型である。即ち

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_8 \end{pmatrix} = 0$$

$A_1 \sim A_8$  は同時に全てが零になることはない。従って一意的に  $A_1 \sim A_8$  が決まるための条件として

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (5-1)$$

ところで  $a_{ij}$  は振動数函数  $\Omega^2$  を含んでおり、従って (5-1) は  $\Omega^2$  に関する代数方程式とも考えられる。故に  $\Omega^2$  に関する根を求めるとそれが自由振動時の固有振動数を与えることになる。実際には (5-1) を  $\Omega^2$  の多項式で与えることは不可能であり、適当な  $\Omega^2$  を与えて (5-1) が成立するように *try and error* の手法で求める必要がある。

境界に周期的に強制力の働く場合にはその周期  $\omega_j$  について  $F = \sum_j F_j \cdot e^{i\omega_j t}$  とあらわされる。ここに  $F_j$  は

強制力で定まる函数であり  $\theta$  に関する。この境界で条件式をあわせると各  $\omega_j$  について次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{j1} \\ \vdots \\ F_{j8} \end{pmatrix}$$

ここで  $|a_{ij}| \neq 0$  であるとして ( $\omega_j$  が既定故、この値は決まっている)  $\omega_j$  に関して未知常数  $A_i$  が一意的に決まる。 $|a_{ij}| = 0$  になると  $A_i$  はいかなければならず、この場合は共鳴 (共振) 状態であり唸りを生ずる。

強制力が周期的でない場合、 $y$  に関して Fourier 積分に展開して

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} F_j \cos \omega_j t \cdot d\omega_j$$

とすれば上と同様になる。

面に分布して強制力の働く場合には (1-1) 式において強制力の項が附加されねばならず、従ってこの特解項を考慮する必要があるが、この場合一般化座標を用いねばならない。

減衰力の働く場合 慣性項以外に流体或は内部抵抗による減衰項が入らねばならない。ところで通常用いられるような抵抗を速度或は速度の二乗に比例すると定めることの妥当性は充分には検討されていない。ただ式の上で取り扱い易い形として採用されているにすぎない。しかし流体力学では速度に比例する粘性、摩擦抵抗が存在することは証明されている。速度に比例する減衰項をとった場合  $\alpha \frac{d}{dt} u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) となりこの項を入れたとしても同様に計算出来ることは容易に示されるが、時間に関する変

数を分離する過程において  $e^{i\omega t}$  とすると

$$\text{慣性項: } -i\omega e^{i\omega t} \quad \text{減衰項: } i\omega e^{i\omega t}$$

となり容易には式は取り扱えない。従って一般に  $e^{pt}$  と分離して  $p$  の値に応じて分類を行なうことになる。前述の  $\Omega^2$  の中に  $p^2$  及び  $p$  の項が含まれることになり  $\Omega^2$  の値に応じて  $p$  は実数、複素数となり実数の場合は *aperiodic damping*, 実数根の場合は *critical damping*, 複素根の場合は *oscillatory damping* となる。

速度の二乗に比例するものをとった場合には、変数の二乗に関する項となり *non-linear* な問題となる。

## §6 解の性質及び特性値

§5で示された如く固有振動数を求めるためには  $-D^2$  に関する代数方程式 (行列式の形) を解かねばならず計算は容易ではない。従って (3-9) で示される式の形及び Legendre 函数の性質から振動時の解の性質をさぐってみる。

まず円板の振動を導くと,

$$\nabla^2 w = -\frac{1}{D} \cdot \frac{m}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w \quad (6-1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

(6-1) の解は Bessel 函数  $J, N$  及び Ber, Bei 函数であらわされる。

円形壁板の振動は応力函数表示として

$$N_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F - \frac{A'(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F, \quad N_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} F$$

$$N_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} F - \frac{A'(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F$$

とおくと  $u = -\frac{(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial}{\partial r} F$ ,  $v = -\frac{(1+\nu)}{Eh} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} F$  となり, 適合条件は常に満たされ, 従って

$$\nabla(F) - \frac{1-\nu^2}{Eh} A' \frac{\partial^2}{\partial t^2} F = 0$$

筒壁板において  $\nabla(F) = 0$  なる解は  $F = 0$  の時のみおこり得る。従って静的状態へは接続しない。又釣合式より

$$\nabla(\lambda) - \frac{2(1+\nu)}{Eh} A' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \lambda = 0 \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi, \quad v = \frac{\partial}{\partial r} \phi, \quad \phi = t\lambda$$

が出る。故に壁板の振動はどちらも同程度の減衰性を示すが, 全体的な影響はどちらが大きいかわからない。

非常に扁平な球殻の場合  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cot \varphi \approx 1/\varphi$  となるから (3-9) に  $1/\alpha^2$  で割り  $u\varphi = r$  とおくと

$$H_2^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{a^2}$$

$a \rightarrow \infty$ ,  $\frac{2}{a^2} \rightarrow 0$  故に  $H_2^* = \nabla = H^*$  とすると (3-1) は

$$\left( H^* - \frac{A(1-\nu^2)}{Eh\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( H^* H^* + \frac{Eh}{D\alpha^2} + \frac{A}{D\alpha^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi - \frac{A}{D\alpha^3} (2+3\nu+\nu^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0 \quad \text{--- (6-2)}$$

$A = \frac{m\alpha^2}{\gamma}$  であって  $\alpha$  が非常に大きいと  $\frac{Eh}{D\alpha^2} = 0$  と考えられるから 壁板解 + 円板解 + (おろ量) の形となり  $a \rightarrow \infty$  で (おろ量) = 0 となる。従って  $\alpha$  がさして大きくない場合には 円板解 + 壁板解 の形にはならぬ一般の振動では両者の影響がセル・シムされる。

扁平でない場合, 解の性質から軸対称, 逆対称程度の振動の形状の把握が又検討がなされ得る。Legendre 関数の order を  $\mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{4} - \lambda}$  とすると,  $\lambda$  に関して (11-9) 表示では次の三次方程式

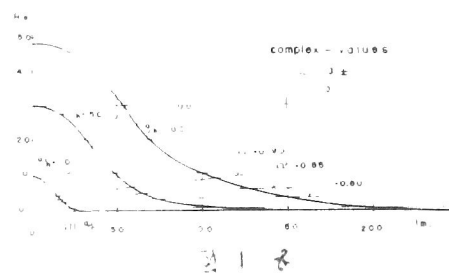
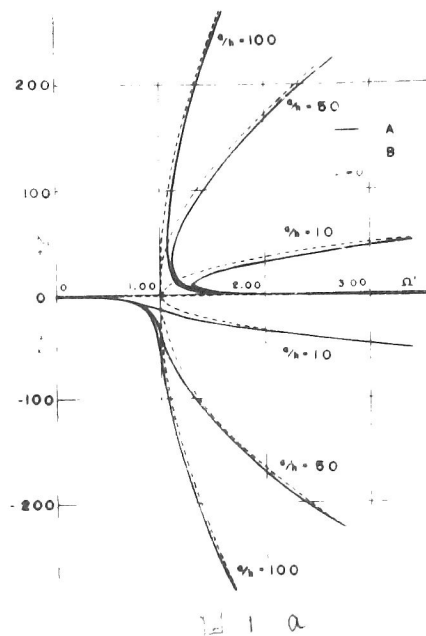
$$\lambda^3 + \{4 + (1-\nu^2)\Omega^2\}\lambda^2 + k(1-\Omega^2)\lambda + k\{2 + (1+3\nu)\Omega^2 - (1-\nu^2)\Omega^4\} = 0 \quad (6-3)$$

がまた (w) 表示ではあらわれない解 (3-11) より又が得られる。

$$\lambda_4 = -\{2 + 2(1+\nu)\Omega^2\} \quad (6-4)$$

$\lambda$  は  $\Omega^2$  と  $k$  をパラメータとする振動時の特性値、特に (6-3) は特性方程式と見做せる。

パラメータに於して (6-3) の入を求めると図 1 a 図 1 b のようになる。尚当には法線方向慣性項のみを考えた場合の特性値をも併記する。(実線) さて図 1 a, b および (6-4) よりわかる杯に静時状態において容易に分離可能で表現可能であるいわゆる Membrane 解と Inertensional 解は振動時においては特性値の相違により解の形態が異なっているのが容易には Extensional な振動と Inertensional な振動に分離され得ず、両者の合成された状態としてしか表現されないりで、ここでは両者を合せて膜筋



振動と名付ける。静的状態における曲げ解は振動状態では円板の振動に移行されるもの故 板の振動と名付ける。

(6-3)より求まる入は図1に示される如く、 $\Omega^2$ が1の近辺の値のとき 膜的要素と板的要素のものが同時に同程度の大きさを有し、又これらの入は質的に各要素に分離され得ない。すなわち $\Omega^2$ の小さい範囲内では膜的要素の振動解が $\Omega^2$ の増加につれて板の振動解に移行し、また逆に $\Omega^2$ の小さい範囲内では板の振動の解であったものが $\Omega^2$ の増加につれて膜の振動に移行するものがある。これらの移行点は $\Omega^2$ の各値に対して常に $\Omega^2=1$ の近辺であって、この事は逆に球殻の固有振動数はこのあたりに存し、またそれが意味をもつことを示している。即ち軸対称振動の如く球面を一つの動きが主たる場合は Nayfeh の結果から知られる如く $\Omega^2$ は1の近辺に存在している。逆対称振動では面そのものの振動よりも剛体的移動の要素の強い振動となることは容易に予想されるので $\Omega^2=1$ の近辺に存在するとは云えず、軸対称振動時よりかなり小さな $\Omega^2$ を取ることが予想される。

(6-3)の入の取り得る領域に於て解の性状の検討を行なう。(図2参照)

1) 入: 実数の場合 (領域I)

$\Omega^2 \geq \frac{4}{1-\mu^2}$  入<sub>1</sub>は入<sub>2</sub>は大きな正值 入<sub>3</sub>は絶対値小なる負値、残る入<sub>1</sub>は絶対値大なる負値であって 入<sub>3</sub>に対して  $\mu = -\frac{1}{2} + i\epsilon$  で  $\epsilon \gg 1$  でありこれは境界より一様減衰する

解であつてその減衰性は急速である。  $b$  が大きくなる程その傾向は大きい。  $\lambda_1$  に対しては、 $\mu \gg 1$  であつて ( $a/h=100$  で  $0(10^2) < )$

$$|P_\mu(\cos \varphi)| \leq \sqrt{\mu\pi} e^{\mu \sin \varphi} \ll 1, \quad |Q_\mu(\cos \varphi)| \leq \sqrt{\mu\pi} e^{\mu \sin \varphi} \ll 1$$

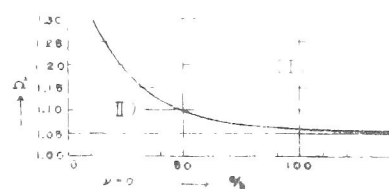
となり、偏平でないかぎりこの解による変位応力は共に小さくなり  $\varphi$  方向に関して波長は短かく高次振動に寄与する解となる。  $\lambda_2$  に関しては  $\varphi$  方向に波長が長く減衰性はほとんどなく、低時振動時後述の  $\lambda_4$  による解と共働して殻全域に影響を与える膜的振動の解となり振動数の変化の影響をうけることが少なくなる。

$\Omega^2 \leq \frac{1}{1-\mu^2}$  では  $\lambda_2, \lambda_3$  が正値で  $\lambda_1$  が負値となり、  $\lambda_{2,3}$  による解は境界より一様に減衰する解をあらわし、  $\lambda_1$  によるものは  $\lambda_2$  によるものに比較してその傾向は大きい。  $\Omega^2$  が小さくなると  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  による解のその傾向は同程度となる。  $\lambda_1$  によるものは全域にわたる高次の振動のものであるが値は小さい。  $\Omega^2$  のこの値の範囲内では各解の性質は  $\Omega^2$  の変化の大きな影響を受ける。

ii)  $\lambda$ : 三実数で  $\lambda_2 = \lambda_3$  の場合

図2の曲線上の場合であつて  $\lambda_2 = \lambda_3$  は正値でかなり大きな値でありそれによる解はかなり急激な一様減衰となる。  $\lambda_1$  は負値であつて絶対値は大きく性状は i) に含まれる。

図 2



iii)  $\lambda$ : 1個の実数と2個の複素数の場合 (領域II)

$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$  とすると  $\Omega^2 \geq 1$  の範囲では  $\alpha \gg \beta$  であつて、

これらに基づく解は同程度に減衰性の大きな解であって  $\varphi$  方向の波長の長いものである。  $\Omega^2 < 1$  では実部  $\alpha$  は小さくなり虚部  $\beta$  が非常に大きな値となる。これらの解は減衰は急激で且つ  $\varphi$  方向に関して波長の短いもので静的状態の曲げ解に接続する。  $\lambda_1$  は実数で負値となり  $\Omega^2$  が小さい範囲では絶対値は小さく  $\varphi$  方向に波長の長い全域的な振動をあらわす解のものであって  $\lambda_4$  の解と共に膜的振動の解となる。

以上述べた諸傾向は  $a/h$  が大きくなる程、その度合が大きくなる。

$\lambda_4$  は  $\Omega^2$  が非常に大きくはならないかぎり絶対値の小さく、  $\Omega^2$  の影響の大きくない負値であって殻全域にわたる低次の振動の解であり、  $a/h$  に無関係なもので  $\lambda_3$  と共働して膜的振動をあらわす。

次に各解の振動数の変化にともなう変化をみると  $\lambda_3$  による解は  $\Omega^2$  が小さい範囲では  $\varphi$  方向に波長の長い全域的な振動のものであったが  $\Omega^2 = 1$  の近辺から急激に波長の短かい高次の振動となるが減衰性のない全域的なものである。他方波長の短かくて減衰の大きい振動波は次第に一樣減衰波となり、やがてその一つはその傾向が益々強くなるが他の一つは次第に一樣減衰の波が長くなり、やがて波長の長い全域的な振動波となる。

以上の諸特性値を比較して、殻の低次振動時 ( $\Omega^2 = 1$  の近辺) の振動性状には応力函数表示からは定まらない  $\lambda_4$  による解が最も意味をもつこと、換言すれば振動の場合、



低次では殻全域的な振動は  $\lambda_4$  による解のみで充分に示され、境界の影響をあまりうけないが、境界周辺では境界条件に従う振動の乱れのあることがわかる。しかし、境界条件の影響を受けた全域的な高次の振動があり、このことは静的状態における膜解と曲げ解との関係と同じだとは云えず、従ってまた、境界条件に基づく自由振動の固有振動数を求めるためには全ての解を考慮する必要があることも結論される。すなわち固有振動数決定には応力函数表示より求まる解が大きな意味を有する事になる。

尚対称振動 ( $n=0$ ) の場合には  $\lambda_4$  は独立には出て来なくて別に独立に撓り振動の解が得られる。この事は偏平でない限り、対称振動時は殻全域にわたる  $\varphi$  方向に波長の長い振動がなく、非対称時に比較して一般に固有振動数が高く、且つ構造的には危険の少ない局部的また短波長の振動であることを示している。

(1-1) に於いて法線方向の慣性項のみを考慮した場合は  $\Omega^2=1$  の近辺では領域 I, II 共非常に違った  $\lambda$  の値を与える。(図 1. a, b 参照) この事は  $\Omega^2=1$  の近辺で固有振動数を求める場合、および応力・変位を求める場合には応力の釣合式において  $u, v$  の慣性項を無視することが出来ない事、また変位  $w$  に対して非常に異なった振動形状を与えることを示している。殊述の如く特に対称振動時には  $u, v$  の慣性項を無視することは不可である。edge の固定された場合の固有振動数を偏平な球殻について E. Reissner が求めており<sup>(5)</sup>、それを  $\Omega^2$  に換算すると  $\Omega^2-1$  の近辺の値となり、

また Naghdi の出した数値<sup>(14)</sup>からも対称振動時は勿論,  $n$ が増すと固有振動数が低下する事を考慮して,  $u, v$  の慣性項を無視することの不都合性は指摘される。

尚 *Quasiextensional* 振動について少しおいておく。Rayleigh, Flugge 等は *Inextensional* 振動をとりあげているがこの振動は一般に *Dynamic* の場合の厳正解には含まれない事をここで示す。法線方向釣合式より

$$\frac{D}{A^3} H_0 H_2(w) + \frac{m}{g} a \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0 \quad \text{-----} \quad (a)$$

$$\text{但し } N_y = N_0 = N_{y0} = 0$$

$$w = w e^{i\omega t} \text{ と変数分離し, } \frac{\pi a^2}{E A g} \omega^2 = \Omega^2 \text{ とすると}$$

$$H_0 H_2(w) + k \Omega^2 w = 0 \quad \text{-----} \quad (b)$$

ところで  $\epsilon_y = \epsilon_0 = \epsilon_{0y} = 0$  より  $H_2(w) = 0$  となり (b) とは一致しなくなる。即ち *Inextensional* 振動は存在しないのである。

## §7 特性値による諸理論・手法の比較

特性値入を用いて同様の手法により諸理論・諸近似の比較を行なう。特性方程式は次の様になる。

i) 厳正式(当論文のもの)

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (4+k)\lambda + 2k + \Omega^2[(1-\nu^2)\lambda^2 + (1+3\nu)k - k\lambda] - (1-\nu^2)k\Omega^4 = 0$$

ii)  $\varphi, \theta$  方向釣合式に於いて剪断力を無視したる場合

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (4+k)\lambda + 2k + \Omega^2[(1-\nu^2)\lambda^2 + (1+3\nu)k - k\lambda] - (1-\nu^2)k\Omega^4 = 0$$

iii) 近似曲げ理論式<sup>(24)</sup>による場合

$$\lambda^3 + k\lambda + \Omega^2[(1-\nu^2)\lambda^2 + 2(1+\nu)k - k\lambda] - (1-\nu^2)k\Omega^4 = 0$$

iv) Reissner の偏平殻の場合 (坪井のもとこれに含まれる)

$$\lambda^3 + k + \Omega^2[-k\lambda] = 0$$

v)  $u, v$  による慣性項を無視した場合,

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (4+k)\lambda + 2k + \Omega^2[-k\lambda - 2k] = 0$$

vi) 法線方向釣合式において,  $N_x, N_y$  内の  $u, v$  の慣性項による影響を無視した場合。

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (4+k)\lambda + 2k + \Omega^2[(1-\nu^2)\lambda^2 - k\lambda - (1-\nu^2)k] - k(1-\nu^2)\Omega^4 = 0$$

これらを見るに i), ii) は一致している。即ち変位に関する限り解の形は一致するが応力において差を生ずる。境界条件を応力を用いて満す場合に固有振動数は異なった値となるがその差はわずかであると思われる。程度はわからななり。iii), iv) の場合は  $\Omega^2$  の項が i) と異っており、 $\lambda$  の値がある程度小さい場合にはかなり違った解を与える可能性がある。静的状態ではこのうち i) と一致する解のみを採用しているのであるが動的な場合ではそれは不可である。即ち殻面全域にわたって影響を与えるような解では誤差は大きくなる。iii) の方は  $\Omega^2=1$  の近傍で約 20% の相違であるが iv) は  $\Omega^2$  の項を含まず (これは  $u, v$  の慣性項を無視しているため自由度が低下した事による。)  $\Omega^2=1$  の近傍でも全く異なった  $\lambda$  の値となり高次振動の取り扱いにおいて誤差は大きくなる。低次振動の場合には  $\Omega^2$

の項において行なわれたと同じ order の近似が  $\Omega^2$  の項においても行なわれておりその点で III) よりも筋が通るとは云え、I) と全く離れた値となる。即ち部分的には I) に近い解を与えるが全ての解を採用するとは行けだ違った解も含まれることになる。II) の場合は既述の通りであって  $\Omega^2 = 1$  の近傍以外では充分の精度の近似値を与える。が  $\Omega^2$  の項を含んでいないため、高次振動に対しては不可となる。 $n=1$  の場合の振動のように  $\Omega^2$  が非常に小さいと考えられる場合には I) のかわりに II) を充分の精度で用いることが可能である。特に  $a/\ell$  が大きい場合には I) と II) の差は全く無視出来る。II) は I) よりも I) に近い値を与えるがやはり  $\Omega^2 = 1$  の近傍での誤差はやはり大きい。 $\Omega^2 = 1$  の近傍以外では良い近似値を与えるので、 $\Omega^2 = 1$  の近傍以外ではこれを用いて特性値を近似的に容易に求めることが可能となる。

以上の入の値の相違が固有振動数に与える影響は不明であるがかなり大きいものであることは計算例のところで示す。

### §8 近似解及びその精度

近似は特性値入を求める段階においてと解を求めるときの二ヶ所において行なわれる。

特性値入は既に示された如く 3 次代数方程式の根となり、計算は容易ではない。入を近似的に求めることを考

えてやる。

$$Y = (\lambda + 2 + (1-\nu^2)\Omega^2)(\lambda^2 + 2\lambda + k(1-\Omega^2)) + k(2+3\nu+\nu^2)\Omega^2 \quad (8-1)$$

これは  $Y_1 = (\lambda + 2 + (1-\nu^2)\Omega^2)(\lambda^2 + 2\lambda + k(1-\Omega^2))$  なる3次曲線を  $Y$  方向に  $k(2+3\nu+\nu^2)\Omega^2$  だけ移動したものに等しい。即ち横軸 (i.e. axis  $\lambda$ ) を  $-k(2+3\nu+\nu^2)\Omega^2$  だけ上げ、この新しい横軸に対する根を近似的に  $\lambda = -(2 + (1-\nu^2)\Omega^2)$  真における接線に比例してとると (8-1) を書き換えて

$$Y = \{\lambda + 2 + (1-\nu^2)\Omega^2 - \alpha\} \{\lambda^2 + 2\lambda + k(1-\Omega^2) + d\lambda + d\{1 - (1-\nu^2)\Omega^2\} + \lambda^3 - 2\alpha^2\} + 2\alpha\{2 + (1-\nu^2)\Omega^2\} \quad (8-2)$$

ここに  $\alpha = -\{k\Omega^2(2+3\nu+\nu^2)\} / \{\Omega^4(1-\nu^2)^2 - 4 + k(1-\Omega^2)\}$   
 $\Omega^2 = 1$  の近辺では  $\alpha \gg 1$  である。  $d = O(1)$  の範囲を調べるとその時の  $\Omega^2$  の取り得る範囲は

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 &\leq \frac{\alpha}{\alpha + 2 + 3\nu + \nu^2} \quad (d=10^2 \text{ 時 } \Omega^2 \leq \frac{10}{12+3\nu+\nu^2}) \\ \Omega^2 &\geq \frac{-\alpha'}{-\alpha' + 2 + 3\nu + \nu^2} \quad (\alpha'=10^2 \text{ 時 } \Omega^2 \geq \frac{-10}{-8+3\nu+\nu^2}) \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

(8-1) の後半項と (8-2) の後半項を比較する。  $\Omega^2$  が (8-3) の範囲内の場合で且つ  $\alpha/k = O(10^2)$  の通常の殻では  $\alpha$  は非常に小さく、

$$-k(2+3\nu+\nu^2)\Omega^2 \gg -\alpha^3 - 2\alpha^2\{1 + (1-\nu^2)\Omega^2\} - 2\alpha\{2 + (1-\nu^2)\Omega^2\}$$

となり (8-2) で後半項を無視すると (8-2) は次の様になる。

$$Y_2 = \{\lambda + 2 + (1-\nu^2)\Omega^2 - \alpha\} [\lambda^2 + 2\lambda + k(1-\Omega^2) + d\lambda + d\{1 - (1-\nu^2)\Omega^2\}]$$

$Y_2$  は  $Y_1$  より充分に  $Y$  に近い。且つ  $Y$  の充分の精度の近似値を与える。(但し  $\Omega^2 = 1$  近傍を除く) とこゝで  $Y_1 = 0$  の意味を調べると法線方向の釣合式において  $N_p, N_0$  に含まれる  $\psi$  の時刻  $t$  に対する変化率の項を無視すると (この

誤差は非常に小さい事は明らか)  $Y_1=0$  に等しい表示が得られ、従ってそれより精度の良い  $Y_2$  は全く無意味なものではなく厳正式にある小さな近似を与えたものであることがわかる。 $\Omega^2$  が十分に小さいか、大きいと

$$Y_2 = \{\lambda + 2 + (1-\nu)\Omega^2 - 1\} \{\lambda^2 + 4\lambda(1-\Omega^2)\} \quad (8-4)$$

と出来る。 $\Omega^2=1$  の近傍ではやはり3次方程式を解かねばならぬ。 $\Omega^2=1+\varepsilon$  ( $\varepsilon$ は±の値で  $\ll 1$ ) とおくと  $\nu \leq 0.3$  を考慮して、

$$\lambda^3 + (5+\varepsilon)\lambda^2 - 4\varepsilon\lambda + 4(2+3\nu+\nu^2-\varepsilon)=0 \quad (8-5)$$

これを解くことは(6-3)を解くよりも容易である。

高い order の Legendre 函数は一般に数値計算が非常に困難である。特に複素 order の場合は全く困難となる。従って解について近似を行なう。尚  $\lambda_4$  に関する解については、数表で与えられる範囲内の函数であるから近似は行なわず、§6 に示されたものをそのまま用いる。従って以下では記載を省略する。

偏平でない場合、 $(H_0 - \lambda_i)\psi = 0$  は次の様になる。

$$\psi = \lambda_i' \sqrt{e} \sin \varphi \quad \text{とおくと } X \text{ に関して}$$

$$X'' + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cot^2 \varphi - \frac{n^2}{4 \sin^2 \varphi} - \lambda_i \right) X = 0$$

$m \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cot^2 \varphi - \frac{n^2}{4 \sin^2 \varphi}$  を小さい値として常数と見做し、

$$X = e^{-r\varphi} \quad \text{とおくと}$$

$$r^2 + (m - \lambda_i) = 0 \longrightarrow r = \pm \sqrt{\lambda_i - m}$$

$$i) \quad \lambda = \alpha \pm i\beta \quad \text{の場合} \quad \varphi' = \varphi_0 - \varphi$$

$$r = \pm (\gamma_1 \pm i\gamma_2)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\alpha-m}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha-m)^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{-\frac{\alpha-m}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha-m)^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-\gamma_1 \varphi'} (A_1 \cos \gamma_2 \varphi' + A_2 \sin \gamma_2 \varphi')$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-\gamma_2 \varphi} (B_1 \cos \gamma_1 \varphi + B_2 \sin \gamma_1 \varphi) \quad (9-1)$$

ii)  $\lambda$ : 実数の場合

$\lambda$ : 正値  $\gamma = \pm \sqrt{\lambda - m}$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} (A_1 e^{-\sqrt{\lambda-m} \varphi'} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda-m} \varphi}) \quad (9-2)$$

$\lambda$ : 負値  $\gamma = \pm i \sqrt{\lambda + m}$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \{ A (\cos \gamma \varphi + i \sin \gamma \varphi) + B (\cos \gamma \varphi - i \sin \gamma \varphi) \} \quad (9-3)$$

ところで以上の近似は  $|\lambda|$  が  $|m|$  に比して充分大きい時充分なる精度をもつ。従って、 $|\lambda|$  と  $|m|$  との比較を行なうと、 $m$  の値は臨平殻でないから  $0(1) \sim 0(10)$  である。(図3)

ところで (9-1) の場合  $\omega^2$  が小さい範囲内では、

$$\beta \approx R(1 - \omega^2)$$

$$\gamma/R = 10 \rightarrow R = 0(10^3)$$

$$\gamma/R = 100 \rightarrow R = 0(10^5)$$

故に  $|\lambda| \gg |m|$  である。(9-2) の

場合  $\mu = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda}$  とすると、

$P_\mu$  は円錐函数となり一様減衰

の函数である。 $\lambda$  の値に応じて、

この函数値を求め (9-2) と比較すると表1の様になる。

これで見ると、 $\lambda \geq 4.00$  では充分の近似であるといえる。 $\lambda \leq 4.00$  の正值に対しては直接円錐函数値を求め

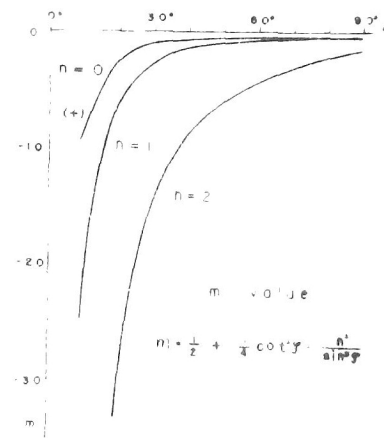


図 3

表 I

$\varphi$	$\lambda = 25.25$		$\lambda = 4.25$		$\lambda = 1.25$	
	I	II	I	II	I	II
$\pi/2$	1	1	1	1	1	1
$\pi/3$	0.079	0.079	0.595	0.515	0.686	0.698
$\pi/4$	0.0242	0.0245	0.292	0.296	0.595	0.683
$\pi/6$	0.00795	0.00806	0.2100	0.2100		0.784

ここに

$$\text{I} : P_\mu = P_{-1/2} + i\sqrt{x} \quad \text{II} : e^{-\sqrt{\lambda-m}\varphi'} \quad (\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi)$$

ねばならないがこの範囲の入に対しては数値計算は容易である。(9-1)に於いて  $\Omega^2=1$  の近辺では  $\Omega$  は小さくなるが、 $\Omega$  は図1aに見られる様に充分大きな値であって、(9-2)の場合に接続する。従って、(9-1)は  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  の全域にわたって充分の精度で近似解として採用出来る。

$|\lambda|$  が充分大であると、Legendre 函数の近辺展開、

$$P_\mu^\nu(\cos\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} \cdot \frac{\cos[(\mu+\frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4} + \nu\frac{\pi}{2}]}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin\varphi}} [1 + o(\mu^{-1})]$$

$$[\varepsilon \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon \quad \varepsilon > 0, \quad |\mu| \gg \frac{1}{\varepsilon}]$$

に於いて、 $o(\mu^{-1}) \approx 0$ 、として  $\nu=0$  の場合を考えると、

$$P_\mu(\cos\varphi) = K \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} [\cos(\mu+\frac{1}{2})\varphi + \sin(\mu+\frac{1}{2})\varphi]$$

$\mu + \frac{1}{2} = \sqrt{\lambda^* + \frac{1}{4}}$  であるから  $|\lambda| \gg |m|$  の場合、 $\mu + \frac{1}{2} \doteq \sqrt{\lambda^* + m}$  として

$$P_\mu \doteq K \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} [\cos\sqrt{\lambda^* + m}\varphi + \sin\sqrt{\lambda^* + m}\varphi]$$

同様に

$$Q_\mu \doteq K \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} [\cos\sqrt{\lambda^* + m}\varphi - \sin\sqrt{\lambda^* + m}\varphi]$$

故に  $|\lambda| \gg |m|$  の場合 (9-3) を採用する。また、この場合、

$\varphi=0$  に於いては  $P_\mu(\cos\varphi)$  に対応する項は regular であ



ると見做す。尚この場合の精度は決定し得ない。 $\lambda \leq 0$ で $|\lambda|$ の小さい場合には $\mu \geq 0$ であり、漸化関係式によって、函数の order を下げると、 $0 \leq \mu \leq 2$  に対して Legendre 函数表が与えられている。<sup>[22]</sup>

以下に一部 $\lambda$ に対する近似も含めて、近似解を示す。計算プログラミングの関係上望ましい形として $\gamma, w$ の導函数の $\lambda$ の表示とする。尚 $\lambda$ が特性方程式の等根である場合(図2)の解は、その点における固有振動数存在の有無のチェックの意味しかもたないので省略する。この時の $\Omega$ は次式で近似的に検討される。 $\Omega_0 = 1 + \varepsilon$ とおくと、 $\varepsilon$ が次式を満たす時、 $\lambda$ は等根を取る。

$$\varepsilon \sqrt{3R\varepsilon} - 3\varepsilon = \frac{9}{2}(2+3\nu+\nu^2)$$

以下において、 $e^{i\omega t}$  の記載を省略する。

偏平でない球殻。

$$-R^2 \leq \frac{10}{12+3\nu+\nu^2}$$

$$\mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left\{2\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} + 3\nu\right)\Omega^2 - (1-\nu^2)\Omega^4\right\} / (1-\Omega^2)}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-\left(1 + \frac{d}{2} + m\right) + \sqrt{m^2 + (2+d)m + R(1-\Omega^2) + d\{d - (1-\nu^2)\Omega^2\}}}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{d}{2} + m\right) + \sqrt{m^2 + (2+d)m + R(1-\Omega^2) + d\{d - (1-\nu^2)\Omega^2\}}}$$

$$\lambda = \frac{-R(2+3\nu+\nu^2)\Omega^2}{R(1-\Omega^2) + d^4(1-\nu^2)^2 - 4} \approx 0(1), \quad C_1 = \frac{1}{Eh a} \cdot \frac{\lambda_1 + (1-\nu) + (1-\nu^2)\Omega^2}{(1-\nu)\frac{1}{R}(\lambda_1 + 2) - 1}$$

$$\lambda_1 = -\{2 + (1-\nu^2)\Omega^2 - d\}$$

$$\nu \pm i\zeta = -\frac{1}{Eh a} \cdot \frac{\lambda_1 + (1-\nu) + (1-\nu^2)\Omega^2}{(1-\nu)(\lambda_1 + 2)/R - 1}, \quad m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cot^2\varphi - \frac{n^2}{4\sin^2\varphi}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \left[ 2 + \lambda \pm \sqrt{(2+d)^2 - 4R(1-\Omega^2) - 4d\{d - (1-\nu^2)\Omega^2\}} \right]$$

特に  $\Omega^2 = 0.5$  では

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-m + \sqrt{m^2 + k(1-\Omega^2)}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{m + \sqrt{m^2 + k(1-\Omega^2)}}$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} [2 + \alpha \pm \sqrt{4k(1-\Omega^2)}] \tau$$

$$\frac{1}{12 + \frac{1}{2}\nu + \nu^2} \leq \Omega^2 \leq \Omega_0^2 \quad (\Omega_0^2: \text{等根をとるとき})$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha - m + \sqrt{(\alpha - m)^2 + \beta^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-(\alpha - m) + \sqrt{(\alpha - m)^2 + \beta^2}}$$

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta \quad (\text{複号同々}) \quad \cdots \equiv \text{三次方程式の根}$$

$|\lambda_1|$  はかなり大きな値である。

$$\psi = (A_1 p_\mu^n + B_1 q_\mu^n + \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} [A_2 \cos r_2 \varphi' + A_3 \sin r_2 \varphi'] \\ + \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi} [B_2 \cos r_2 \varphi + B_3 \sin r_2 \varphi]) \cos n\theta$$

$$w = (C_1 (A_1 p_\mu^n + B_1 q_\mu^n) + \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} [(r_2 A_2 - g A_3) \cos r_2 \varphi' + (r_2 A_3 \\ + g A_2) \sin r_2 \varphi'] + \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi} [(r_2 B_2 - g B_3) \cos r_2 \varphi + (r_2 B_3 + g \\ \times B_2) \sin r_2 \varphi]) \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = A_2 \left\{ (r_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \cos r_2 \varphi' + r_2 \sin r_2 \varphi' \right\} \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} \\ + A_3 \left\{ -r_2 \cos r_2 \varphi' + (r_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \sin r_2 \varphi' \right\} \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} \\ + B_2 \left\{ (-r_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \cos r_2 \varphi - r_2 \sin r_2 \varphi \right\} \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi} \\ + B_3 \left\{ r_2 \cos r_2 \varphi + (-r_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \sin r_2 \varphi \right\} \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi} \times \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = A_2 \left[ \left\{ (r_1^2 - r_2^2) - r_1 \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \right\} \cos r_2 \varphi' + \left\{ 2 r_1 r_2 - r_2 \cot \varphi \right\} \right. \\ \left. \times \sin r_2 \varphi' \right] \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} \\ + A_3 \left[ \left\{ -2 r_1 r_2 + r_2 \cot \varphi \right\} \cos r_2 \varphi' + \left\{ (r_1^2 - r_2^2) - r_1 \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \right\} \right. \\ \left. \times \sin r_2 \varphi' \right] \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi'} \\ + B_2 \left[ \left\{ (r_1^2 - r_2^2) + r_1 \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \right\} \cos r_2 \varphi + \left\{ 2 r_1 r_2 + r_2 \cot \varphi \right\} \right. \\ \left. \times \sin r_2 \varphi \right] \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} e^{-r_1\varphi}$$

$$+ B_3 \left[ \{-2r_1 r_2 - r_2 \cot \varphi\} \cos r_2 \varphi + \{r_1^2 - r_2^2 + r_1 \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi}\} \sin r_2 \varphi \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi} \quad \times \cos n \theta$$

$$\phi = -(1+\nu) \Omega^2 \psi$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = A_2 \left[ \{r r_1 - g r_2 - \frac{1}{2} p \cot \varphi\} \cos r_2 \varphi' + \{r r_2 + g r_1 - \frac{1}{2} g \cot \varphi\} \sin r_2 \varphi' \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + A_3 \left[ \{-r r_2 - g r_1 + \frac{1}{2} g \cot \varphi\} \cos r_2 \varphi' + \{r r_1 - g r_2 - \frac{1}{2} p \cot \varphi\} \sin r_2 \varphi' \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + B_2 \left[ \{-p r_1 + g r_2 - \frac{1}{2} p \cot \varphi\} \cos r_2 \varphi + \{-g r_1 - p r_2 - \frac{1}{2} g \cot \varphi\} \sin r_2 \varphi \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi} \\ + B_3 \left[ \{p r_2 + g r_1 + \frac{1}{2} g \cot \varphi\} \cos r_2 \varphi + \{g r_2 - p r_1 - \frac{1}{2} p \cot \varphi\} \sin r_2 \varphi \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi} \quad \times \cos n \theta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = A_2 \left[ \{(r_1^2 - r_2^2) p - 2 g r_1 r_2 - (p r_1 - g r_2) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} p\} \cos r_2 \varphi' \right. \\ \left. + \{g(r_1^2 - r_2^2) + 2 p r_1 r_2 - (p r_2 + g r_1) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} g\} \sin r_2 \varphi' \right] \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + A_3 \left[ \{-2 p r_1 r_2 - g(r_1^2 - r_2^2) + (p r_2 + g r_1) \cot \varphi - \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} g\} \cos r_2 \varphi' \right. \\ \left. + \{p(r_1^2 - r_2^2) - 2 g r_1 r_2 + (p r_1 - g r_2) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} p\} \sin r_2 \varphi' \right] \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + B_2 \left[ \{(r_1^2 - r_2^2) p - 2 g r_1 r_2 + (p r_1 - g r_2) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} p\} \cos r_2 \varphi \right. \\ \left. + \{g(r_1^2 - r_2^2) + 2 p r_1 r_2 + (p r_2 + g r_1) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} g\} \sin r_2 \varphi \right] \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi} \\ + B_3 \left[ \{-2 p r_1 r_2 - g(r_1^2 - r_2^2) - (p r_2 + g r_1) \cot \varphi - \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} g\} \cos r_2 \varphi \right. \\ \left. + \{p(r_1^2 - r_2^2) - 2 g r_1 r_2 + (p r_1 - g r_2) \cot \varphi + \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} p\} \sin r_2 \varphi \right] \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi} \\ \times \cos n \theta$$

$$H_2(r) = (\lambda_1 + 2) w = A_1 c_1 (\lambda_1 + 2) P_\mu^n + B_1 c_1 (\lambda_1 + 2) Q_\mu^n \\ + A_2 \left\{ (\xi p - \xi g) \cos r_2 \varphi' + (\xi g + \xi p) \sin r_2 \varphi' \right\} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + A_3 \left\{ -(\xi g + \xi p) \cos r_2 \varphi' + (\xi p - \xi g) \sin r_2 \varphi' \right\} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi'} \\ + B_2 \left\{ (\xi p - \xi g) \cos r_2 \varphi + (\xi g + \xi p) \sin r_2 \varphi \right\} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \varphi}} e^{-r_1 \varphi}$$

$$+ B_3 \left\{ -(S\xi + \bar{\xi}R) \cos r_2 \varphi + (SR - \bar{\xi}\xi) \sin r_2 \varphi \right\} \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} e^{-r_2 \varphi} \quad \times \cos n\theta$$

$$\text{ここに } \lambda_2 + 2 = S + i\xi \quad (\lambda_3 + 2 = S - i\xi)$$

$P_\mu^n, Q_\mu^n$  に関しては §4 で示されたもののまゝである。

但し  $|\lambda_1|$  が充分大きい範囲内では

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 (\cos r\varphi + i \sin r\varphi) \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} + B_1 (\cos r\varphi - i \sin r\varphi) \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= A_1 \left[ -\frac{1}{2} \cot \varphi (\cos r\varphi + i \sin r\varphi) + r (\cos r\varphi - i \sin r\varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ &\quad + B_1 \left[ -\frac{1}{2} \cot \varphi (\cos r\varphi - i \sin r\varphi) + r (-i \sin r\varphi - \cos r\varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} &= A_1 \left[ \left( \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} - r^2 \right) (\cos r\varphi + i \sin r\varphi) - \frac{1}{2} r \cot \varphi (\cos r\varphi - i \sin r\varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ &\quad + B_1 \left[ \left( \frac{2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} - r^2 \right) (\cos r\varphi - i \sin r\varphi) + \frac{1}{2} r \cot \varphi (\cos r\varphi + i \sin r\varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= c_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = c_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \quad r = \sqrt{m + \lambda_1'}, \quad \lambda_1' = -\lambda_1 \end{aligned}$$

$\lambda_0 \leq \Omega^2$  の場合

$\lambda_1$ : 三次方程式の根として求める。

$\lambda_1$ : 負値となる。  $\lambda_1' = -\lambda_1$  ( $\lambda_1' \gg 1$ )

$\lambda_2$ : 正値で大きな値。

$\lambda_3$ : 正, 或は負値,  $|\lambda_3| < \lambda_1', \lambda_2$

特に  $\frac{-10}{-8+3\nu+\nu^2} \leq \Omega^2$  では

$$\lambda_1' = (2 + d + \sqrt{(2+d)^2 + 4h(\Omega^2 - 1) - 4d\{d - (1-\nu^2)\Omega^2\}}) / 2$$

$$\lambda_2 = (- (2+d) + \sqrt{(2+d)^2 + 4h(\Omega^2 - 1) - 4d\{d - (1-\nu^2)\Omega^2\}}) / 2$$

$$\lambda_3 = -\{2 + (1-\nu^2)\Omega^2 - d\}$$

i: 計出      ii: 実数となる。

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 (\cos r_1 \varphi + i \sin r_1 \varphi) \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} + B_1 (\cos r_1 \varphi - i \sin r_1 \varphi) \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} \\ &\quad + A_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} e^{-\sqrt{\lambda_2 - m} \varphi} + B_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda \sin \varphi}} e^{-\sqrt{\lambda_3 - m} \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_3 \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-\sqrt{\lambda_3 - m} \varphi} + B_3 \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-\sqrt{\lambda_3 - m} \varphi} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = & A_1 \left[ -\frac{1}{2} \cot \varphi (\cos r_1 \varphi + \sin r_1 \varphi) + r_1 (\cos r_1 \varphi - \sin r_1 \varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \\
& + B_1 \left[ -\frac{1}{2} \cot \varphi (\cos r_1 \varphi - \sin r_1 \varphi) - r_1 (\cos r_1 \varphi + \sin r_1 \varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \\
& + A_2 (r_2 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_2 \varphi} + B_2 (-r_2 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_2 \varphi} \\
& + A_3 (r_3 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_3 \varphi} + B_3 (-r_3 - \frac{1}{2} \cot \varphi) \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_3 \varphi} \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = & A_1 \left[ \left( \frac{2 + \cot^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} - r_1^2 \right) (\cos r_1 \varphi + \sin r_1 \varphi) - \frac{1}{2} r_1 \cot \varphi (\cos r_1 \varphi - \sin r_1 \varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \\
& + B_1 \left[ \left( \frac{2 + \cot^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} - r_1^2 \right) (\cos r_1 \varphi - \sin r_1 \varphi) + \frac{1}{2} r_1 \cot \varphi (\cos r_1 \varphi + \sin r_1 \varphi) \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \\
& + A_2 \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} + (r_2 - \frac{1}{2} \cot \varphi)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_2 \varphi} + B_2 \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} + (r_2 + \frac{1}{2} \cot \varphi)^2 \right\} \frac{e^{-r_2 \varphi}}{\sqrt{\sin \varphi}} \\
& + A_3 \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} + (r_3 - \frac{1}{2} \cot \varphi)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_3 \varphi} + B_3 \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} + (r_3 + \frac{1}{2} \cot \varphi)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-r_3 \varphi} \\
H_2(w) = & (\lambda_2 + 2)^{1/2} \quad w = \cos \varphi, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\cos \varphi
\end{aligned}$$

$$ここに \quad r_1 = \sqrt{\lambda_1 + 1}, \quad r_2 = \sqrt{\lambda_2 - m}, \quad r_3 = \sqrt{\lambda_3 - m}$$

特に  $|\lambda_3| = 4.00$  のときは  $A_3, B_3$  の2方は Legendre 函数を伴うものとなる。その導函数は略す。

偏平球殻の場合。

$\lambda$  が決定されると  $(H_0 - \lambda)\psi = 0$  の解は次の形にあらわされる。  $\sin \varphi \rightarrow \varphi, \quad \cot \varphi \rightarrow \frac{1}{\varphi}$  として

$$\left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d}{d\varphi} - \frac{\kappa^2}{\varphi^2} - \lambda_2 \right) \psi = 0$$

i)  $\lambda_2$ : 正值　上式の解は第一種、第二種の变形 Bessel 函数である。  $\sqrt{\lambda_2} \varphi = x$  とおいて

$$\psi = \{ A I_n(x) + B K_n(x) \} \cos n\theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \sqrt{\lambda_2} \left[ A \left\{ \frac{1}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x) \right\} + B \left\{ \frac{1}{x} K_n(x) + K_{n+1}(x) \right\} \right] \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \lambda_2 \left[ A \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{x^2} + 1 \right) I_n(x) - \frac{1}{x} I_{n+1}(x) \right\} \right. \\ \left. + B \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{x^2} + 1 \right) K_n(x) - \frac{1}{x} K_{n+1}(x) \right\} \right] \cos n\theta$$

$$+ B \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{x^2} + 1 \right) K_n(x) - \frac{1}{x} K_{n+1}(x) \right\} \cos n\theta$$

$$w = c_1 \varphi, \quad w^0 = c_1 \varphi^0, \quad w^{00} = c_1 \varphi^{00} \quad c_1: \text{定数}$$

ii),  $\lambda_i$ : 負値 Bessel 函数  $J_n$  がある。  $\sqrt{-\lambda_i} \varphi = x$

$$\psi = \{ A J_n(x) + B Y_n(x) \} \cos n\theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \sqrt{-\lambda_i} \left[ A \left\{ \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \right\} + B \left\{ \frac{n}{x} Y_n(x) - Y_{n+1}(x) \right\} \right] \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\lambda_i \left[ A \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{x^2} - 1 \right) J_n(x) + \frac{1}{x} J_{n+1}(x) \right\} \right. \\ \left. + B \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{x^2} - 1 \right) Y_n(x) + \frac{1}{x} Y_{n+1}(x) \right\} \right] \cos n\theta$$

$$w = c_1 \varphi, \quad w^0 = c_1 \varphi^0, \quad w^{00} = c_1 \varphi^{00}$$

iii)  $\lambda_i$ : 複素数  $\alpha \pm i\beta$  複素数の Bessel 函数がある。

$$\sqrt{\alpha + i\beta} \varphi = z_1, \quad \sqrt{\alpha - i\beta} \varphi = z_2 \quad \text{とおく}$$

$$J_n(z_1) = S_n + iT_n, \quad Y_n(z_1) = U_n + iV_n$$

$$J_n(z_2) = S_n - iT_n, \quad Y_n(z_2) = U_n - iV_n$$

とすると

$$\psi = \{ A_1 S_n + A_2 T_n + B_1 U_n + B_2 V_n \} \cos n\theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left[ A_1 \left\{ \frac{n}{\varphi} S_n - \beta S_{n+1} + \alpha T_{n+1} \right\} + A_2 \left\{ \frac{n}{\varphi} T_n - \alpha T_{n+1} - \beta S_{n+1} \right\} \right. \\ \left. + B_1 \left\{ \frac{n}{\varphi} U_n - \beta U_{n+1} + \alpha V_{n+1} \right\} + B_2 \left\{ \frac{n}{\varphi} V_n - \alpha V_{n+1} - \beta U_{n+1} \right\} \right] \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \left[ A_1 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) S_n + \beta T_n + \frac{1}{\varphi} (\beta S_{n+1} - \alpha T_{n+1}) \right\} \right. \\ + A_2 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) T_n - \beta S_n + \frac{1}{\varphi} (\alpha S_{n+1} + \beta T_{n+1}) \right\} \\ + B_1 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) U_n + \beta V_n + \frac{1}{\varphi} (\beta U_{n+1} - \alpha V_{n+1}) \right\} \\ \left. + B_2 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) V_n - \beta U_n + \frac{1}{\varphi} (\alpha U_{n+1} + \beta V_{n+1}) \right\} \right] \cos n\theta$$

$$w = \{ A_1 \{ \mu S_n - \alpha T_n \} + A_2 \{ \mu S_n + \beta T_n \} + B_1 \{ \mu S_n - \beta T_n \} + B_2 \{ \mu S_n + \alpha T_n \} \} \cos n\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \left[ A_1 \left\{ \frac{n}{\varphi} (\mu S_n - \alpha T_n) - \beta (\mu S_{n+1} - \alpha T_{n+1}) + \alpha (\beta S_{n+1} + \mu T_{n+1}) \right\} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_2 \left\{ \frac{n}{\varphi} (\varrho S_n + \rho T_n) - \psi (\varrho S_{n+1} + \rho T_{n+1}) - d (\rho S_{n+1} - \varrho T_{n+1}) \right\} \\
& + B_1 \left\{ \frac{n}{\varphi} (\rho U_n - \varrho V_n) - \psi (\rho U_{n+1} - \varrho V_{n+1}) + d (\varrho U_{n+1} + \rho V_{n+1}) \right\} \\
& + F_2 \left\{ \frac{n}{\varphi} (\varrho U_n + \rho V_n) - \psi (\varrho U_{n+1} + \rho V_{n+1}) - d (\rho U_{n+1} - \varrho V_{n+1}) \right\} \cos n\theta \\
\frac{\partial w}{\partial y^2} = & \left[ A_1 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) (\rho S_n - \varrho T_n) + \beta (\varrho S_{n+1} + \rho T_n) + \frac{\psi}{\varphi} (\rho S_{n+1} - \varrho T_{n+1}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{d}{\varphi} (\rho T_{n+1} + \varrho S_{n+1}) \right\} \right. \\
& + A_2 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) (\varrho S_n + \rho T_n) - \beta (\rho S_n - \varrho T_n) + \frac{d}{\varphi} (\rho T_{n+1} + \varrho S_{n+1}) \right. \\
& \left. + \frac{\psi}{\varphi} (\rho S_{n+1} - \varrho T_{n+1}) \right\} \\
& + B_1 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) (\rho U_n - \varrho V_n) + \beta (\varrho U_n + \rho V_n) + \frac{\psi}{\varphi} (\rho U_{n+1} - \varrho V_{n+1}) \right. \\
& \left. - \frac{d}{\varphi} (\rho U_{n+1} + \varrho V_{n+1}) \right\} \\
& + F_2 \left\{ \left( \frac{n(n-1)}{\varphi^2} - \alpha \right) (\varrho U_n + \rho V_n) - \beta (\rho U_n - \varrho V_n) + \frac{\psi}{\varphi} (\rho V_{n+1} + \varrho U_{n+1}) \right. \\
& \left. + \frac{d}{\varphi} (\rho U_{n+1} - \varrho V_{n+1}) \right\} \cos n\theta
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}}, \quad d = \sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}} \\
\rho \pm i\varrho &= \frac{1}{Eka} \cdot \frac{\lambda_1 + (1-\nu) + (1-\nu^2) - \lambda^2}{\{(1-\nu)(\lambda_1 + 2)/k\} - 1} \quad (\text{複号同順})
\end{aligned}$$

以上の各函数  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$ ,  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$ ,  $J_n(z)$ ,  $Y_n(z)$  は詳細な数表<sup>(25)</sup>が与えられてゐるので数値計算は容易である。

但し  $\lambda_1$  に関しては常に負値故、解は ii) で与えられてゐる。

## §9 数値計算例

建築構造物に用ゐられる球殻は部分球であるが、軸対称振動に対しては P.M. Naghdi が半球について固有振動数を与えてゐる。しかし建造物には風や地震に対する振動

問題から逆対称振動 ( $n=1$  の場合) が問題となる。特に開角  $90^\circ$  以上の球殻の逆対称時固有振動数の状態を知ることが重要となる。従ってここでは  $n=1$  の場合で、頂角が閉じており下站境界で固定された場合の固有振動数及び固有ベクトルを示す。一例として変形モードを示す。

既述の如く §4 で示した厳正解を用いて固有振動数を求めるには記憶容量の大きい大型高速電子計算機が必要となり、現在の時点では筆者にとってそれは不可能である故、§4 で示した近似解を用いて数値計算を行なう。しかし充分の精度があると考えられる。

計算順序を示すと  $\Omega^2$  が小さく (6-3) の解は 1 の実根 (負数) 2 の複素根であることは推察される故、

①  $\lambda, \alpha/\epsilon$  及び適当な  $\Omega^2$  を与え (6-3) 及び (6-4) より特性値  $\lambda_i$  を求める。

② 実根を選び出し  $\mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i}$  を求め、Legendre 函数  $P_\mu$  及び  $P_{\mu+1}$  を求める。

③ 複素根より  $\mu, \nu$  を求める。

④  $\lambda, \mu, \nu$  等必要な諸量を求める。

⑤ 未知数  $A_1, A_2, A_3, C$  に対する境界における係数を  $\lambda, \mu, \nu, \alpha/\epsilon, w/\epsilon$  について求め、それらを要素とする行列式  $|(a_{ij})|$  の値を求め、零でなければ①にもどり同じ操作をくりかえす。

⑥ 零になればその時の  $\Omega^2$  を固有振動数とし、固有ベクトルを求める。

尚境界条件は下站  $\varphi = \varphi_0$  で  $u = v = w = \frac{w}{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 0$  とし



であり、又頂角が鋭角に於ける事より  $Q_{\mu_1}$  に関する項をすべて落している。(即ち  $B_2=0$   $H=0$  としている。)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

とあるとき

$$\varphi' = 0 \rightarrow \sin \gamma_2 \varphi' = 0 \quad \cos \gamma_2 \varphi' = 1 \quad e^{-\gamma_1 \varphi'} = 1$$

$$a_{11} = \left\{ (\mu_1 - \cot^2 \varphi_0) P_{\mu_1} + \frac{\cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} P_{\mu_1+1} \right\} (1 + \mu_1),$$

$$a_{12} = (\gamma_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi_0) / \sqrt{\sin \varphi_0}, \quad a_{13} = -\gamma_2 / \sqrt{\sin \varphi_0}$$

$$a_{14} = (\cot \gamma_1 P_{\mu_4} - \sin \varphi_0 P_{\mu_4+1}) / \sin \gamma_1$$

$$a_{21} = (\cos \gamma_0 P_{\mu_1} - P_{\mu_1+1}) (1 + \mu_1), \sin^2 \gamma_0, \quad a_{22} = 1 / \sin \varphi_0 \sqrt{\sin \varphi_0}$$

$$a_{23} = 0, \quad a_{24} = \left\{ (\mu_4 - \cot^2 \varphi_0) P_{\mu_4} + \frac{\cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} P_{\mu_4+1} \right\} (1 + \mu_4)$$

$$a_{31} = c_1 \left\{ \cot \gamma_1 P_{\mu_1} - \frac{1}{\sin \gamma_1} P_{\mu_1+1} \right\} (1 + \mu_1), \quad a_{32} = P / \sqrt{\sin \varphi_0}$$

$$a_{33} = -2 / \sqrt{\sin \varphi_0}, \quad a_{34} = 0$$

$$a_{41} = c_1 \left\{ (\mu_1 - \cot^2 \varphi_0) P_{\mu_1} + \frac{\cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0} P_{\mu_1+1} \right\} (1 + \mu_1),$$

$$a_{42} = (R\gamma_1 - 2\gamma_2 - \frac{1}{2} R \cot \varphi_0) / \sqrt{\sin \varphi_0}$$

$$a_{43} = (-R\gamma_2 - 4\gamma_1 + \frac{1}{2} R \cot \varphi_0) / \sqrt{\sin \varphi_0}, \quad a_{44} = 0$$

である。

以上の手順により求めた最は次固有振動数函数  $\Omega^2$  を  $\varphi_0$  の関数において図及表に示す。

又固有クトル及び以後の計算の便に供するため諸係数を共に示す。

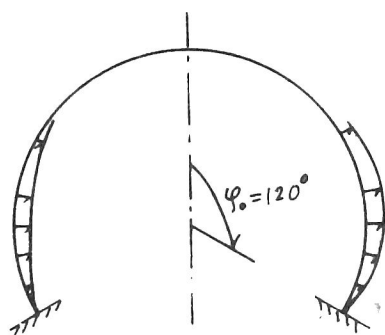
尚参考までに半球で下端自由の場合の軸対称振動時、 $\Omega^2$  を示す。(I. M. Naghdi の結果である。)

表 対称振動時固有振動数係数  $\Omega^2$  (最値値)

$\varphi_0$ $a/h$	$a/h = 200$	$a/h = 400$	$a/h = 600$
$60^\circ$	0.71795	0.71545	0.71455
$70^\circ$	0.52335	0.51845	0.51715
$80^\circ$	0.36875	0.36445	0.36265
$90^\circ$	0.24885	0.24505	0.24377
$100^\circ$	0.15815	0.15505	0.15375
$110^\circ$	0.091205	0.088825	0.087805
$120^\circ$	0.044525	0.042755	0.041195
$130^\circ$	0.013755	0.012445	0.011875

但し ポアソン比  $\nu = 0.3$ 

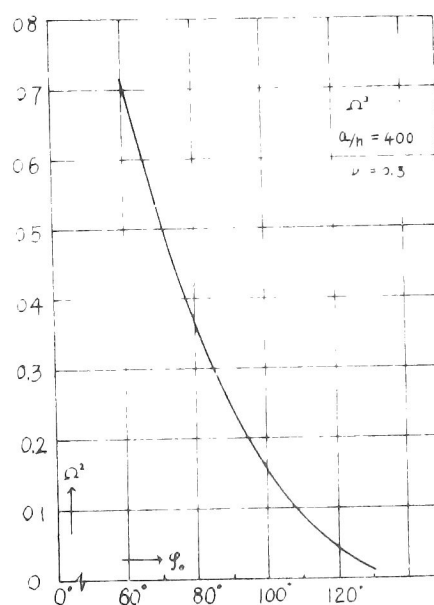
$$\Omega^2 = \frac{ma}{Ehg} \omega^2$$



$\varphi_0 = 120^\circ$   $a/h = 400$  の  
変位  $w$  図

表 P.M. Naghdi の結果  
対称振動  $\varphi_0 = 90^\circ$ 

$a/h$	$\Omega^2$
100	0.76563
50	0.84456
33.3	0.95063
20	1.21000



$\varphi_0$	$\alpha/h$	固有ベクトル				$\rho$	$q$	$C_1$	$\mu_4$	$\mu_1$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$G$							
60	200	+13702+0	+75498-3	-23066-2	+10000+1	-38903+1	-35319+3	+87797+1	+15268+1	+27218+1	+13355+2	+13223+2
	400	+13873+0	+15462-2	-11580-2	+10000+1	-39102+1	-70514+3	+88166+1	+15274+1	+27276+1	+18824+2	+18730+2
	600	+14470+0	+28537-2	-79044-3	+10000+1	-39611+1	-10530+4	+89104+1	+15290+1	+27425+1	+22985+2	+22907+2
70	200	+27676+0	+56561-3	-26780-2	+10000+1	-14337+1	-45926+3	+45021+1	+13959+1	+19337+1	+15173+2	+15134+2
	400	+27975+0	+14712-2	-13562-2	+10000+1	-14483+1	-91679+3	+45259+1	+13972+1	+19388+1	+21424+2	+21396+2
	600	+28335+0	+25609-2	-93764-3	+10000+1	-14840+1	-13689+4	+45829+1	+14002+1	+19514+1	+26174+2	+26150+2
80	200	+42097+0	+25344-2	-23314-2	+10000+1	-46698+0	-52510+3	+30466+1	+12913+1	+15814+1	+16210+2	+16197+2
	400	+41156+0	+12137-2	-11550-2	+10000+1	-44405+0	-10538+4	+30146+1	+12882+1	+15727+1	+22958+2	+22950+2
	600	+40754+0	+79589-3	-75987-3	+10000+1	-43451+0	-15829+4	+30013+1	+12869+1	+15691+1	+28136+2	+28129+2
90	200	+53018+0	+21023-2	-19743-2	+10000+1	+10408+0	-57280+3	+22906+1	+12021+1	+13620+1	+16923+2	+16923+2
	400	+52017+0	+10009-2	-96201-3	+10000+1	+12021+0	-11485+4	+22705+1	+11991+1	+13557+1	+23963+2	+23964+2
	600	+51573+0	+65507-3	-63406-3	+10000+1	+12689+0	-17245+4	+22623+1	+11979+1	+13531+1	+29364+2	+29365+2
100	200	+60900+0	+17291-2	-16366-2	+10000+1	+46453+0	-60640+3	+18617+1	+11313+1	+12192+1	+17410+2	+17415+2
	400	+59888+0	+83122-3	-80089-3	+10000+1	+47603+0	-12150+4	+18487+1	+11288+1	+12146+1	+24646+2	+24650+2
	600	+59458+0	+55003-3	-52904-3	+10000+1	+48085+0	-18239+4	+18432+1	+11278+1	+12126+1	+30197+2	+30201+2
120	200	+70416+0	+12226-2	-11500-2	+10000+1	+85865+0	-64603+3	+14393+1	+10381+1	+10588+1	+17970+2	+17975+2
	400	+69560+0	+59358-3	-56731-3	+10000+1	+86439+0	-12933+4	+14335+1	+10366+1	+10564+1	+25427+2	+25431+2
	600	+69187+0	+39084-3	-37600-3	+10000+1	+86685+0	-19406+4	+14301+1	+10360+1	+10554+1	+31149+2	+31151+2
130	200	+72602+0	+10194-2	-95063-3	+10000+1	+95700+0	-65635+3	+13417+1	+10119+1	+10180+1	+18116+2	+18115+2
	400	+71829+0	+49617-3	-47038-3	+10000+1	+96112+0	-13136+4	+13377+1	+10107+1	+10162+1	+25628+2	+25627+2
	600	+71487+0	+32492-3	-31215-3	+10000+1	+96291+0	-19709+4	+13359+1	+10103+1	+10155+1	+31392+2	+31392+2

## §10 結 べ

球殻の静的状態における一般解が明確になり 応力歪数表示の利点、不備等も明白になった。又振動状態における厳正解が求まり、近似解を示すことによって全ての固有振動数は容易に求められることとなった。

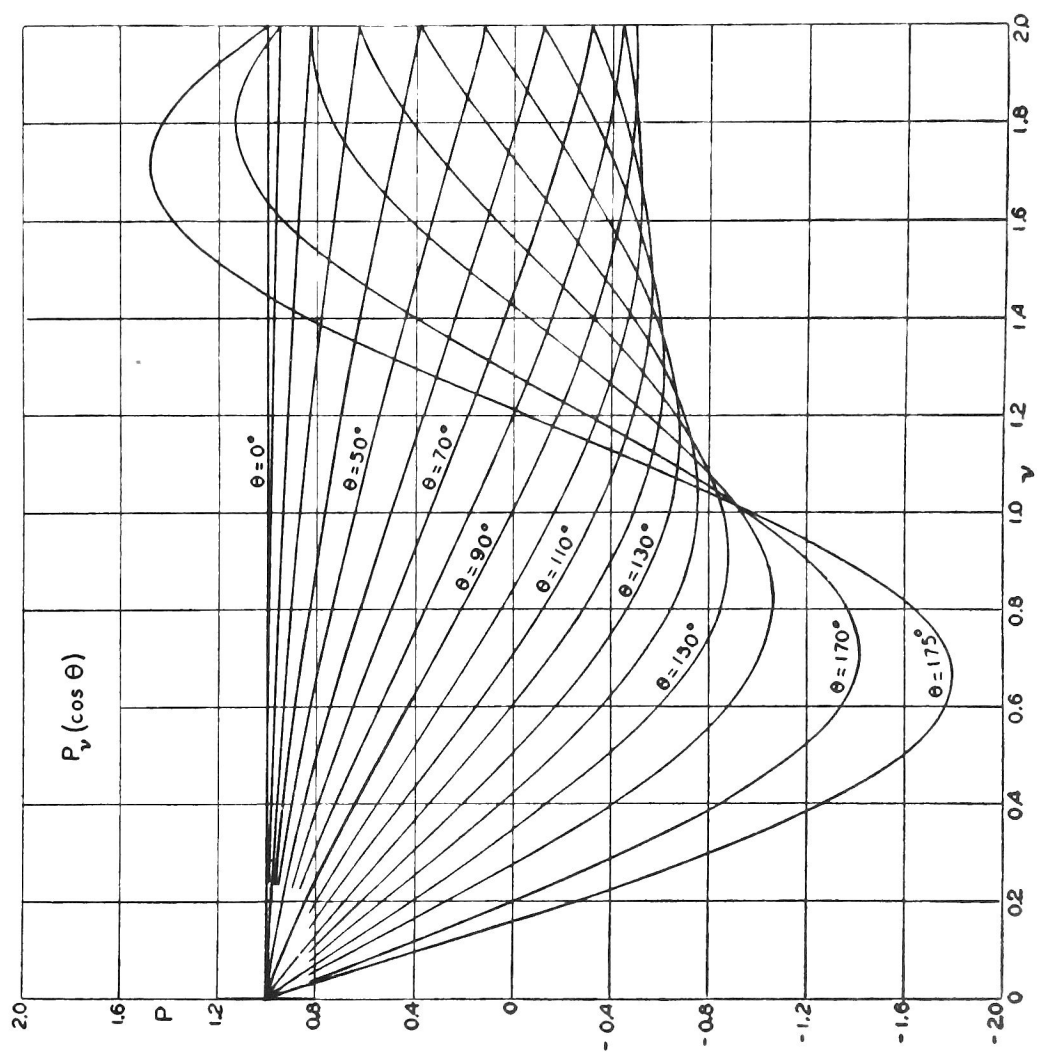
ここに対称振動時の最低次固有振動数を求めた、その結果によると開角  $\varphi_0$  の影響は極めて大きく、又当初予想された事であるが開角が  $\pi/2$  を越えて大きくなると固有振動数は急激に減少する。開角に比べて  $\varphi_0$  の影響は極くわずかであり、変形がうしろめたく対称振動は固有振動は剛体の水平移動と回転による振動である。

この結果は川股等<sup>(19)</sup>によって算出されたこのケースのみに対する略算法の結果と極めて近い値を示し、非常に容易に求まる川股等の方法の優れている事を認識した。しかし建造物としての球殻の振動をよめる場合、対称振動のみではなならずとも問題になるとは限らず、この対称時のみならず一般非対称振動時の固有振動数を求める場合も必要となり、その場合川股等の方法では求まることが出来ず、そのためにも新方法は必須のものとなる。又厳正解の結果との比較において略算法の結果もより有意義になるといふことがこの論文の意義を見い出し得る。

結果は構造計画の段階になりて球殻の形状、材料、厚さ等決定の良き資料となり得ることとなる。



$\theta$	$\nu = 1.1$	1 2	1 3	1 4	1.5	1.6	1.7	1.8	1 9	2.0
10°	.982463	.979971	.977330	.974544	.971609	.968530	.965306	.961937	.958424	.954769
20°	.930510	.920782	.910521	.899731	.888427	.876616	.864311	.851520	.838256	.824533
30°	.846085	.825099	.803106	.780153	.756288	.731556	.706009	.679698	.652678	.625
40°	.732358	.697230	.660787	.623160	.584483	.544892	.504529	.463536	.422057	.380236
50°	.593260	.542960	.491146	.438457	.385144	.331534	.277906	+.224546	+.171992	+.119764
60°	.435048	.369302	.303277	.237487	+.172439	+.108625	+.046528	-.013395	-.070707	-.125
70°	.262707	+.184212	+.107352	+.032911	-.038356	-.105747	-.168608	-.226363	-.278485	-.324533
80°	+.083160	-.003726	-.085870	-.162209	-.231828	-.293895	-.347694	-.392684	-.428461	-.454769
90°	-.096662	-.185629	-.265506	-.335101	-.393447	-.439820	-.473745	-.495011	-.503662	-.5
100°	-.269683	-.352628	-.421019	-.473792	-.510309	-.530315	-.533992	-.521924	-.495078	-.454769
110°	-.428902	-.496128	-.542575	-.567190	-.571540	-.555254	-.520788	-.468913	-.402560	-.324533
120°	-.567487	-.607957	-.621232	-.608117	-.570350	-.510520	-.431952	-.338567	-.234713	-.125
130°	-.679240	-.680298	-.648801	-.587376	-.500235	-.392577	-.270327	-.139860	-.007413	+.119764
140°	-.756377	-.705113	-.617004	-.498494	-.357352	-.202235	-.042220	+.113682	+.260689	.380236
150°	-.792525	-.672251	-.514788	-.331564	-.135126	+.061648	+.246321	.407651	.536224	.625
160°	-.775450	-.562976	-.319350	-.063159	+.186880	.412909	.599730	.735204	.811308	.824533
170°	-.672324	-.318188	+.047601	+.395130	.696918	.930007	1.077683	1.130627	1.087486	.954769
175°	-.542651	-.058480	.413527	.833237	1.165932	1.385435	1.476543	1.433916	1.265476	.989351



## 第二章 円筒殻の振動

## 序

円筒殻の振動は古くは容器類の問題、音響学的な観点から近年では航空機、船舶、兵器類などの振動問題の重要性から数多く取り扱われているが、そのほとんどは用いた円筒殻が対象である。円筒殻の振動はその形状から球曲面や双曲型曲面に比較して解析が容易であることもあって、建築学上必要とされる用いた円筒殻の場合にもおこなわれた研究が知られており、固有振動数も与えられている。ここでは既往の研究をたどってみる。

19世紀末 L. Rayleigh は歪とも関係ない場合の用いた円筒殻の振動及び Extensional 振動（薄膜理論による振動）を論じ、特に後者に対しては両端に単純支持の場合の解を与えている。<sup>[1]</sup> 同じく歪を伴わない場合及び一般的振動理論を Love はその著書に述べ<sup>[2]</sup>、振る、という場合、longitudinal 振動、transverse 振動にわけ、解析方針を示しているが、これは弾性理論の一部としての記述であるため、解の数値結果は与えていない。その後1934年 W. Flügge が歪を伴わない振動理論、Extensional 振動理論が厳正には存在しないことを指摘し、曲げ理論に基づく厳正な運動方程式を樹立したのである。断面力による運動方程式を変位を用いた連立微分方程式に変換し、用いた円筒殻の両端における任意の境界条件のもとでの固有振動数を計算する一連の問題を述べ、円弧方向、



長手方向共に 1-リ工展開した場合の固有振動数を計算している。<sup>[13]</sup>

1953年 E.H. Kennard は P.S. Epstein の方法<sup>[11]</sup>をもとにして、この問題を取り扱った。<sup>[14]</sup> 彼は厚さ方向の応力をも考慮した一般式を樹立し、実用的な単純化を行って、2層の2乗の値を無視しているのによるが、単純式の樹立とは異なっている。翌1954年 Love の第一近似と回転慣性項の無視の仮定のもとに P.M. Naghdi と J.G. Pury は変位を変数とする運動方程式と並び、最終的に  $w$  に関する8階の微分方程式を得ているが非常に煩雑なものである。彼はこの論文で変位(変数)を円周方向にフーリエ展開して変数分離を行い、母線方向解の特性値に対する特性方程式を得て、12項の項を含めても運動における効果の極く微小なことを、接線方向釣合式で剪断力 $Q$ を無視することと反曲率変化の項に  $w$  の2階微分のみをとることの不都合とを特性値の比較から指摘している。又文献[4]は本格的に[5]と一致していること、結論として Love の第一近似以上を考えたも精度は悪からないことに言及している。計算例は示されていない。同年 M.L. Barron と H. H. Bleich の共著による論文が二編出されている。<sup>[6][7]</sup> [6]では無限長の用いた円筒の振動を取り扱っており、その方法は、まず最初 Membrane としての振動数 $R$ のモードを求め、次いで曲げ効果を与えてその修正をかけるもので、エネルギー法に基づいている。取り扱われている振動波は長手方向半波長  $(1-10)a$ 、円周方向  $0 \sim 6$  個の節線をもつ

である。曲げ、効果の修正を行うためにまず Rayleigh  
 の方法で固有振動数の上限を求め、誤差の評価を行う。  
 薄膜理論を決める山Tモードをもち、曲げ効果を合んだ  
 ポテンシャルエネルギーから同じモードに対して修正さ  
 れた固有振動数を求める。これは片側の固有振動数の上  
 限を与えるものがあり、もし薄膜理論のそれとあまり差  
 がなければ充分な近似値と考えられる。変位は長手方向、  
 横方向共にフーリエ展開したものである。固有振動数  
 に関する3次代数方程式を得、その根を求める。  
 文献[1]は自由振動が low-frequency range であることを  
 示し、文献[6]と同様の方法で変位をフーリエ展開  
 しているが acoustic medium のポテンシャルを含めた  
 のであって建築上役に立つものではない。周子我國にあ  
 いても石崎によつてこの問題は論じられているが、<sup>[1][9]</sup> には  
 は用いていない円筒殻の振動を取り扱っており、この方  
 面の数少ない研究の一つであるが建築上はこの問題が重要  
 とする。石崎は[8]において、文献[3]の運動方程式をその  
 まま採用し、そのうち長手方向慣性項及び接線方向運動方  
 程式中の断力 $Q_\theta$ を無視して近似式を解析的に用いている。  
 変位に関して表示を行う。変位 $w$ に関して8階の微分  
 方程式を導き、この式より近似を行つて最終的に  
 比較的簡単な式を示している。しかし、この式では  
 円弧方向慣性項をも無視して式に近しいものがあるが近  
 似度の検討を行つていない。周子支持の場合の解をフ  
 ーリエ級数を用いて与えているが数値計算は行つて

いた。[9]では[8]に対して、長手方向トバキ級数展開した場合の解を示し、図より数値計算が容易であることと述べ、式から固有振動数を一つだけ近似的に推定しているが、これは全固有振動数のどれか一つに位置するものがあるかは述べていない。1955年から日置が同じく用いている円筒曲板の振動に関する論文と数論発表しており、そこには[13]にまとめられている。これによって法線方向慣性項以外をすべて無視し、且、接線方向釣合式において法線方向断面力を無視する近似を行っており、従って静的問題における断面力の応力函数表示をそのまま用い、長手方向反りトバキ級数展開した場合の解の特性値を求め、文献的と同様にこの特性値を基に近似度を論じ十分に信頼し得る結果を予えたと論じている。この結論は図のそれと反する如く且、曲率がさして大まかに用いた円筒では日置の結論は妥当だと思われる。日置はこの後長手方向に変位 $w$ と $\sin$ 展開した場合の解をもちいて、直線端と自由支持である場合の数値計算を行った。この方法は固有振動数を合んだ行列式の根を求める方法でtry and errorの方式で固有振動数を求めている。 $n=1, 2, 3$ の場合について、円角 $\varphi=60^\circ$ の場合に、解の固有ベクトルが予えられているが、ある予えられた方法に対するもののみである故、一から一般、円筒曲板の振動特性を知ることには出来た。結果は同時に示された実験結果と非常によく一致している。

他方同じく1955年 用いた円筒殻の固有振動数を数値

的に与えられたのが Yu.Yi-Yuan にある<sup>[10]</sup>。Donnell型の運動方程式を導出し、Donnellと同様に単純化を行なった自由端、固定端、との複合の3タイプについて論じている。最低の固有振動数は第1の場合が最小で、第2が中位第3の場合が最大となる。ここから与えられた近似によると特性方程式は同じ境界条件下の梁の横振動と同じとなっている。変位に角1であらわされ一般式は8階微分方程式であるが、単純化を行なった実質的に4階微分方程式としている。又一般的にディスカッションとして変位を円周方向にフーリエ展開し、長手方向変数に関する特性値を求めることを述べた後、境界条件を満たす解を与えて、直接に振動数方程式を与えている。又、具体的に寸法を与えて固有振動数を計算している。

以上の諸研究はほぼ円筒殻の振動は論じられている。用いた場合は取り扱ったが容易であるが、用いた場合は取り扱ったが相当煩雑にもかかわりず、大まかな近似の上に立つものといえる。固有振動数と数値で与えてあり、円筒殻の固有振動数を求めるにあたって十分では無いとしても一定の値を評価することが可能である。従ってこの方面の研究により厳正なものを求める方向に進むものと思われるが、それはここでは緊急の研究課題とは考えられず、この判断のもとに筆者はこの方面の研究を行なっている。尚、それ以後に筆者とされた方面の論文としては、初期振りを受けた場合の振動に関するもの<sup>[13]</sup>、直交異方向の厚い円筒に関するもの<sup>[14]</sup>、実験的研究<sup>[15]</sup>、などが

また、いづれも共に円筒殻を対象としている。

## 第三章 H. P. シェルの振動

## 序

H. P シェルの用途はその形態からほとんど建造物に限られており、各地に数多く見られるようになったのは、建築技術と建材の進歩した二十数年来のことであって理論方面における研究は静的状態における一般解析がかなり厳正に行なわれるようになったのは全くここ数年のことである。<sup>(1)</sup> 動的問題に関しては前章の球殻振動が音響学的要求から数多くの学者によって早くから研究されたようには研究はなされておらず、筆者の知るところでは筆者の研究以外にはまだほとんどなくただ負の Gauss 曲率をもつた立体格子の振動をエネルギー法で取り扱いその性状を論じた研究<sup>(6)</sup>を知るのみである。

ところで負の Gauss 曲率を有する曲面はその設計に当って材料学的強度よりも曲面の剛性が非常に重要な意味をもつ。この形式の曲面は力学的には非常に能率のよいものであって、かなりの薄厚で充分の強度は容易に与えることが可能であるが、その反面曲面に充分の剛性が与えられないと、風や雪荷重(片荷重)によって大きな変形を生じ、また少しの周期的外力(風等)によって、共鳴や自励振動をおこし、ダワツキを生じやすくなる。これは建築上非常に不都合なことであって、音響上また屋根葺材の亀裂などからも必ずさけねばならないことがうである。

換言すれば、面の Gauss 曲面では材料学的強度と共に曲面の剛性の点から設計が規制されねばならない。

ところで曲面に剛性を与える要素としては曲面の厚さ、ライズ(捩り率)、弾性係数、ポレストレス(初緊張力…この場合はネット構造に近い)などがあるが、これらが曲面の剛性にどの程度の影響を与えるかを知る一つのインデックスとして曲面の振動が考えられる。換言すれば固有振動数におけるこれら要素の影響の程度を知ることによって曲面の剛性への影響を知りうる。従って曲面の設計において、固有振動数を設計規準として与えることによって必要剛性を確保することが可能である。

このような観点から第一章で用いたと同様の手法により、 $\Sigma = \Sigma \theta / c$  型 H.P. 殻の振動状態の解を求め、固有振動数の決定をはかった。解は一般任意境界条件に対するものであるが、ここでなされた数値結果は周辺単純支持、4点固定、周辺固定の場合である。尚周辺固定の場合は第一章の手法に基づくものではなく、梁の振動に関する解から導びいた函数を用いて、直接に固有値問題に帰するようにした。得られた数値結果のもとに各々の要素の剛性を与える影響を明確にした。

$\xi, \eta$  ; 無次元化された変数 (座標)

$\rho$  ; 密度 ( $ML^{-3}$ )

$h$  ; 厚さ

$L$  ; characteristic length (大なる皿長)

$L_x$  ;  $x$  方向半皿長 ( $L_y$  についても同じ)

$k$  ;  $k = 12(1-\nu^2)L^2/h^2$

$a$  ;  $+L^2, c^2$

$\Omega^2$  ;  $\rho h L^2 \omega^2 / E h$  ( $\omega$  : 角速度)

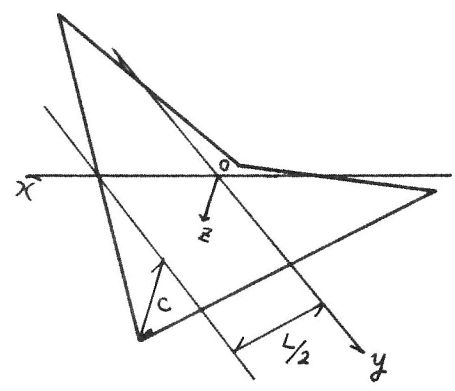
$\beta$  ;  $\beta = T / E h$  ( $T$  : 単位断面長さ当りの初張力)

$\mu$  ; ポアソン比



# §2 基礎運動方程式とその解法

曲面の方程式を次のようにする。  
 characteristic length  $L$  (大なる辺長)をとく  $x = \xi L, y = \eta L$  ( $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2}$ )とおき  $\xi, \eta$  を曲面のパラメータとする。基本量(テンソル)は次のようになる。



$$\begin{aligned}
 g_{11} &= L^2 \left(1 + \frac{L^2}{c^2} \eta^2\right) & g_{12} &= \left(\frac{L^2}{c}\right) \xi \eta \\
 g_{22} &= L^2 \left(1 + \frac{L^2}{c^2} \xi^2\right) & g &= L^4 \left(1 + \frac{L^2}{c^2} \xi^2 + \frac{L^2}{c^2} \eta^2\right) \\
 H_{11} &= H_{22} = 0 & H_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{L^4}{c} \\
 \{^1_1\} &= \{^2_1\} = \{^1_2\} = \{^2_2\} = 0 \\
 \{^1_{12}\} &= \{^1_{21}\} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{2L^6}{c^2} \eta^2 = \frac{L^2}{c^2} \eta^2, & \{^2_{12}\} &= \{^2_{21}\} = \frac{L^2}{c^2} \xi^2 \\
 e_{110} &= g_{11} u^1_1, & e_{220} &= g_{22} u^2_2, & e_{12c} &= \frac{1}{2} (g_{11} u^1_2 + g_{22} u^2_1) - H_{12} w \\
 N_x &= L^2 n^1, & N_y &= L^2 n^2, & N_{xy} &= L^2 n^{12} \\
 w &= w, & \alpha_x &= L \xi^1, & \alpha_y &= L \xi^2, & u &= \sqrt{g_{11}} u^1, & v &= \sqrt{g_{22}} u^2 \\
 M_y &= L^2 m^{22}, & m^{11} &= -\frac{D}{L^4} (w_{,11} + \mu w_{,22}), & M_x &= L^2 m^{11}, & M_{xy} &= L^2 m^{12}, \\
 m^{22} &= -\frac{D}{L^4} (w_{,22} + \mu w_{,11}), & m^{12} &= -\frac{1-\mu}{L^4} D \cdot w_{,12}
 \end{aligned}$$

運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 n^{\alpha\beta}|_\alpha - H^{\beta\gamma\alpha} - f h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^\beta &= 0 \\
 n^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + \kappa^\alpha|_\alpha - f h \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= 0 \\
 n^{\alpha\beta}|_\alpha - \kappa^\beta &= 0 \\
 e_{\lambda\alpha} n^{\alpha\beta} - e_{\lambda\beta} m^{\alpha\beta} H^\lambda_\alpha &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

(1)

ここに  $|_\alpha$  は共変微分  $e_{\lambda\beta}$  は置換テンソルとあらわす。  
 又 回転慣性項は除いている。

ところで H.P. シェルの振動の問題となるのはシェルが偏平な場合である。従って偏平な場合を対象とする。すると  $c$  は非常に大きく 1 に比して  $\frac{1}{2}L^2/c^2$ ,  $\frac{1}{2}L^2/c^2$  を無視出来るので

$$g_{11} = g_{22} = L^2, \quad g_{12} = 0, \quad g = L^4, \quad n^{\alpha\beta}|_x = n^{\alpha\beta}_x$$

とする。結局運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} n^{11}_1 + n^{12}_2 - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^1 &= 0 \\ n^{12}_1 + n^{22}_2 - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^2 &= 0 \\ 2n^{12}H_{12} + g'_{11} + g'_{22} - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= 0 \\ m^{11}_1 + m^{21}_2 - g^1 &= 0 \\ m^{12}_1 + m^{22}_2 - g^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

前章球殻の振動で行なったように 静的な場合の断面力の応力函数表示から類推して動的な場合 (2) の応力函数表示を次のように行なう。

$$\left. \begin{aligned} n^{11} &= \frac{1}{L^2} (\phi_{22} + f_1) \\ n^{12} &= \frac{1}{L^2} (-\phi_{12} + f_2) \\ n^{22} &= \frac{1}{L^2} (\phi_{11} + f_1) \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

静的な場合には  $f_1 = f_2 = 0$  であって  $f_1, f_2$  の意味は前章と同じである。(2) に代入して  $f_1, f_2$  を決定する。(4) のオーネニ式より

$$(f_{1,11} - f_{1,22}) - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(1+M)L^2}{Eh} (\phi_{22} - \phi_{11}) = 0 \text{----- (4)}$$

(4) を  $f_1$  に関する微分方程式と見做すところの解として

$$f_1 = - \frac{\rho h (1+M)L^2}{Eh} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi + k)$$

ここに  $k$  は (4) の 1 次解である。ところで今対象は工学的  
のものである故、(4) の 1 次解  $k$  は零とおいて何ら支障は  
ない。故に

$$f_1 = - \frac{fR(1+\mu)L^2}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \quad (5)$$

偏平という近似化のもとでの適合条件

$$\varepsilon_{12,12} = (\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11})/2 - H_{12} \varepsilon_{12} \quad (6)$$

と (2) に諸関係式及 (4), (5) を代入して  $\phi, f_2, w$  に関する次  
の三式を得る。

$$\frac{1}{4} [f_{2,11} + f_{1,22}] - fh \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{2(1+\mu)}{EL^2} f_2 + \frac{2}{c} w \right\} = 0 \quad (7-1)$$

$$\frac{1}{Eh} \left[ \nabla \nabla \phi - \frac{(1-\mu^2)fRL^2}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \phi - 2(1+\mu)f_{2,12} \right] - \frac{2L^2}{c} \varepsilon_{12} = 0 \quad (7-2)$$

$$-\frac{D}{4} \nabla \nabla w - fh \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + \frac{2}{cL^2} [-\phi_{,12} + f_2] = 0 \quad (7-3)$$

ここに  $\nabla = (\ )_{,11} + (\ )_{,22}$  である。  $f = \phi e^{i\omega t}$   $w = w e^{i\omega t}$   $f_2 = f_2 e^{i\omega t}$   
等と時間に関する項を変数分離し、  $fhL^2\omega^2/Eh = \Omega^2$  とお  
くと (7-1) ~ (7-3) は結局次のようになる。

$$\begin{aligned} & \nabla \nabla \nabla \nabla \phi + (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2 \nabla \nabla \nabla \phi + k \left\{ \frac{2(1+\mu)(1-\mu^2)}{h} \Omega^4 - \Omega^2 \right\} \nabla \nabla \phi \\ & + \left\{ \alpha \Omega^2 - (3-\mu)(1+\mu)\Omega^4 \right\} k \nabla \phi + k \alpha \phi_{,1212} - \left\{ \Omega^2 - \frac{\alpha}{2(1+\mu)} \right\} 2(1+\mu) \times \\ & \times (1-\mu^2) k \Omega^4 \phi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{ここに } k = \frac{1-(1-\mu^2)L^2}{h^2}, \quad \alpha = \frac{+L^2}{c^2}$$

$w$  に関して (8) 式と全く同一の微分方程式が得られる

(8) (もしくは  $w$  に関して) を解けば (7-1) ~ (7-3) より  $\phi, f_2$  の一組  
の変数  $f_2, w$  (すなわち  $\phi$ ) は求まる。従って H.F. ミエル振動の  
解は得られることになる。

一様に境界の形に依して (8) 式の解は次のようにおける。

a) 周辺が  $\xi + \eta = \text{const.}$  のとき  $\phi = e^{\lambda(\xi + \eta)}$

b) 周辺が  $\xi - \eta = \text{const.}$  のとき  $\phi = e^{\lambda(\xi - \eta)}$

c) 周辺が  $\xi = \text{const.}$   $\eta = \text{const.}$  のとき

$$\phi = e^{\lambda(\xi \pm i\eta)} \text{ または } \phi = e^{\lambda(\eta \pm i\xi)} \quad (n = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$$

通常用いられる境界は c) の場合である故に c) の場合について以後論を進める。しかし a) b) の場合も同様に取り扱われる。

(8) に c) を代入すると  $\phi$  の特性値入に関する次の 8 次方程式が得られる。(  $\phi$  の特性を  $\chi$  と仮定する。 )

$$\chi^8 - n^2 = \chi \quad \text{とおいて}$$

$$\chi^8 + A\chi^3 + B\chi^2 + C\chi + D = 0 \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{ここに } A = (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2$$

$$B = 2(1-\mu^2)(1+\mu)\Omega^4 - k\Omega^2$$

$$C = k\{a\Omega^2 - (3-\mu)(1+\mu)\Omega^4\} - k\alpha n^2$$

$$D = -k\alpha n^4 + \{a - 2(1+\mu)\Omega^2\}(1-\mu^2)k\Omega^4$$

(9) の根入の形として次のように考えられる。

$$\lambda = \pm \alpha \quad (\text{実根}) \quad \text{----- (10-1)}$$

$$\lambda = \pm i\alpha \quad (\text{虚根}) \quad \text{----- (10-2)}$$

$$\lambda = \pm \alpha \pm i\beta \quad (\text{複素根}) \quad \text{----- (10-3)}$$

(10-1) は境界より一様減衰波形 (10-2) は境界より減衰なしの振動波形 (10-3) は境界より *quasi-stationary* の振動波形である。根の形のあらわれ方は  $\Omega^2$  の値に応じて次のようになる。

- i) 実 - 2 個, 虚 - 2 個, 複 - 4 個  
 ii) 実 - 2 個, 虚 - 6 個  
 iii) 実 - 4 個, 虚 - 4 個

いずれにせよ得られた式を用いて (8) の解中はあらわし、  
 未知積分定数は 16 個出て来る。

(10-1) ~ (10-3) に従って  $\phi, w, f_2$  を書き下すと次のようになる。

(10-1) の場合

$$\phi = (C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta'} + (C_3 \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta''}$$

$$w = A_1 \{ (C_1 \sin n\xi - C_2 \cos n\xi) e^{-\alpha \zeta'} - (C_3 \sin n\xi - C_4 \cos n\xi) e^{-\alpha \zeta''} \}$$

$$f_2 = \frac{1}{n\alpha} \{ (\alpha^2 - n^2) \Omega^2 + (1 - \mu^2) \Omega^4 \} \{ (C_2 \cos n\xi - C_1 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta'} - (C_4 \cos n\xi - C_3 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta''} \}$$

$$f_1 = (1 + \mu) \Omega^2 \phi$$

$$f_{,11} = -n^2 \phi, \quad \phi_{,22} = \alpha^2 \phi$$

$$\phi_{,12} = n \{ C_2 \cos n\xi - C_1 \sin n\xi \} e^{-\alpha \zeta'} - \alpha n \{ C_3 \cos n\xi - C_4 \sin n\xi \} e^{-\alpha \zeta''}$$

$$w_{,11} = -n^2 w, \quad w_{,22} = \alpha^2 w$$

$$w_{,12} = A_1 \alpha n \{ (C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta'} + (C_3 \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta''} \}$$

$$w_{,1} = A_1 n \{ (C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta'} - (C_3 \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) e^{-\alpha \zeta''} \}$$

$$w_{,2} = A_1 \alpha \{ (C_1 \sin n\xi - C_2 \cos n\xi) e^{-\alpha \zeta'} + (C_3 \sin n\xi - C_4 \cos n\xi) e^{-\alpha \zeta''} \}$$

(10-2) の場合

$$\phi = \{ C_1 \cos \alpha \zeta' \cos n\xi + C_2 \cos \alpha \zeta' \sin n\xi + C_3 \sin \alpha \zeta' \cos n\xi + C_4 \sin \alpha \zeta' \sin n\xi \}$$

$$w = A_2 \{ C_1 \sin \alpha \zeta' \sin n\xi - C_2 \sin \alpha \zeta' \cos n\xi + C_4 \cos \alpha \zeta' \cos n\xi - C_3 \cos \alpha \zeta' \sin n\xi \}$$

$$f_2 = -\frac{1}{n\alpha} \{ (\alpha^2 + n^2) \Omega^2 + (1 - \mu^2) \Omega^4 \} \times$$

$$\times \{ C_1 \sin \alpha \zeta' \sin n\xi - C_2 \sin \alpha \zeta' \cos n\xi + C_4 \cos \alpha \zeta' \cos n\xi - C_3 \cos \alpha \zeta' \sin n\xi \}$$

$$\phi_{11} = -n^2 \phi, \quad \phi_{22} = -\alpha^2 \phi$$

$$\phi_{12} = \alpha n \{ c_1 \sin \alpha z \sin n \xi - c_2 \sin z \cos n \xi + c_4 \cos \alpha z \cos n \xi - c_3 \cos \alpha z \sin n \xi \}$$

$$w_{11} = -n^2 w, \quad w_{22} = -\alpha^2 w$$

$$w_{12} = A_2 \alpha n \{ c_1 \cos \alpha z \cos n \xi + c_2 \cos \alpha z \sin n \xi + c_3 \sin \alpha z \cos n \xi + c_4 \sin \alpha z \sin n \xi \}$$

$$w_{21} = A_2 n \{ c_1 \sin \alpha z \cos n \xi + c_2 \sin \alpha z \sin n \xi - c_4 \cos \alpha z \sin n \xi - c_3 \cos \alpha z \cos n \xi \}$$

$$w_{22} = A_2 \alpha \{ c_1 \cos \alpha z \sin n \xi - c_2 \cos \alpha z \cos n \xi - c_4 \sin \alpha z \cos n \xi + c_3 \sin \alpha z \sin n \xi \}$$

(10-3) 代入合

$$\begin{aligned} \phi = & \{ c_1 \cos \beta z \cos n \xi + c_2 \cos \beta z \sin n \xi + c_3 \sin \beta z \cos n \xi + c_4 \sin \beta z \sin n \xi \} e^{-\alpha z'} \\ & + \{ c_5 \cos \beta z \cos n \xi + c_6 \cos \beta z \sin n \xi + c_7 \sin \beta z \cos n \xi + c_8 \sin \beta z \sin n \xi \} e^{-\alpha z''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = & A_3 \left[ \{ (\alpha \cos \beta z + \beta \sin \beta z)(c_1 \sin n \xi - c_2 \cos n \xi) + (\alpha \sin \beta z - \beta \cos \beta z) \right. \\ & \times (c_3 \sin n \xi - c_4 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z'} + \{ (\beta \sin \beta z - \alpha \cos \beta z)(c_5 \sin n \xi - c_6 \\ & \times \cos n \xi) - (\alpha \sin \beta z + \beta \cos \beta z)(c_7 \sin n \xi - c_8 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z''} \Big] \\ & + A_4 \left[ \{ (\alpha \sin \beta z - \beta \cos \beta z)(c_1 \sin n \xi - c_2 \cos n \xi) - (\alpha \cos \beta z + \beta \sin \beta z) \right. \\ & \times (c_3 \sin n \xi - c_4 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z'} + \{ (\alpha \sin \beta z + \beta \cos \beta z)(c_5 \sin n \xi - c_6 \\ & \times \cos n \xi) - (\alpha \cos \beta z - \beta \sin \beta z)(c_7 \sin n \xi - c_8 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z''} \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = & -\frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)n} \{ (\alpha^2 - \beta^2 - n^2)\Omega^2 + (1 - \mu)\Omega^4 \} \times \\ & \times \left[ \{ (\alpha \cos \beta z + \beta \sin \beta z)(c_1 \sin n \xi - c_2 \cos n \xi) + (\alpha \sin \beta z - \beta \cos \beta z) \right. \\ & \times (c_3 \sin n \xi - c_4 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z'} - \{ (\alpha \cos \beta z - \beta \sin \beta z)(c_5 \sin n \xi - \\ & - c_6 \cos n \xi) + (\alpha \sin \beta z + \beta \cos \beta z)(c_7 \sin n \xi - c_8 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z''} \Big] \\ & + \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)n} \Omega^2 \left[ \{ (\alpha \sin \beta z - \beta \cos \beta z)(c_1 \sin n \xi - c_2 \cos n \xi) - (\alpha \right. \\ & \times \cos \beta z + \beta \sin \beta z)(c_3 \sin n \xi - c_4 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z'} + \{ (\alpha \sin \beta z + \beta \cos \beta z) \times \\ & \times (c_5 \sin n \xi - c_6 \cos n \xi) - (\alpha \cos \beta z - \beta \sin \beta z)(c_7 \sin n \xi - c_8 \cos n \xi) \} e^{-\alpha z''} \Big] \end{aligned}$$

$$f_1 = (1 + \mu)\Omega^2 \phi$$

$$\phi_{11} = -n^2 \phi$$

$$\Phi_{22} = (\alpha^2 - \beta^2) \Phi - 2\alpha\beta \{ (C_1 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_2 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_3 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_4 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta'} - (C_5 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_6 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_7 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_8 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$\Phi_{12} = -\alpha \eta \{ (C_1 \cos \beta \eta \sin n\xi - C_2 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_3 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_4 \sin \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} - (C_5 \cos \beta \eta \sin n\xi - C_6 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_7 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_8 \sin \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \} + \beta \eta \{ (C_1 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_2 \sin \beta \eta \cos n\xi - C_3 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_4 \cos \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_6 \sin \beta \eta \cos n\xi - C_7 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_8 \cos \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$\psi_{11} = -n^2 w$$

$$w_{22} = (\alpha^2 + \beta^2) A_3 \{ (\alpha \cos \beta \eta - \beta \sin \beta \eta) (C_1 \sin n\xi - C_2 \cos n\xi) + (\alpha \sin \beta \eta + \beta \cos \beta \eta) (C_3 \sin n\xi - C_4 \cos n\xi) \} e^{-\alpha \eta'} - \{ (\alpha \cos \beta \eta + \beta \sin \beta \eta) (C_5 \sin n\xi - C_6 \cos n\xi) + (\alpha \sin \beta \eta - \beta \cos \beta \eta) (C_7 \sin n\xi - C_8 \cos n\xi) \} e^{-\alpha \eta''} \} + (\alpha^2 + \beta^2) A_4 \{ \{ (\alpha \sin \beta \eta + \beta \cos \beta \eta) (C_1 \sin n\xi - C_2 \cos n\xi) - (\alpha \cos \beta \eta - \beta \sin \beta \eta) (C_3 \sin n\xi - C_4 \cos n\xi) \} e^{-\alpha \eta'} + \{ (\alpha \sin \beta \eta - \beta \cos \beta \eta) (C_5 \sin n\xi - C_6 \cos n\xi) - (\alpha \cos \beta \eta + \beta \sin \beta \eta) (C_7 \sin n\xi - C_8 \cos n\xi) \} e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$w_{12} = n(\alpha^2 + \beta^2) A_3 \{ (C_1 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_2 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_3 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_4 \sin \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_6 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_7 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_8 \sin \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \} + n(\alpha^2 + \beta^2) A_4 \{ (C_1 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_2 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_3 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_4 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta'} - (C_5 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_6 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_7 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_8 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$w_{11} = n A_3 \{ \{ (\alpha \cos \beta \eta + \beta \sin \beta \eta) (C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) + (\alpha \sin \beta \eta - \beta \cos \beta \eta) (C_3 \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) \} e^{-\alpha \eta'} + \{ (\alpha \sin \beta \eta + \beta \cos \beta \eta) (C_5 \cos n\xi + C_6 \sin n\xi) + (\alpha \cos \beta \eta - \beta \sin \beta \eta) (C_7 \cos n\xi + C_8 \sin n\xi) \} e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha \sin \beta \gamma + \beta \cos \beta \gamma)(C_7 \cos n\xi + C_8 \sin n\xi) \} e^{-\alpha \eta''} \} \\
& + n A_4 \{ (\alpha \sin \beta \gamma - \beta \cos \beta \gamma)(C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) - (\alpha \cos \beta \gamma + \beta \sin \beta \gamma)(C_3 \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) \} e^{-\alpha \eta'} + \{ (\alpha \sin \beta \gamma + \beta \cos \beta \gamma)(C_5 \cos n\xi + C_6 \sin n\xi) \\
& - (\alpha \cos \beta \gamma - \beta \sin \beta \gamma)(C_7 \cos n\xi + C_8 \sin n\xi) \} e^{-\alpha \eta''} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 = & (\alpha^2 + \beta^2) A_3 \{ (C_1 \cos \beta \gamma \sin n\xi - C_2 \cos \beta \gamma \cos n\xi + C_3 \sin \beta \gamma \sin n\xi - C_4 \\
& \times \sin \beta \gamma \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \cos \beta \gamma \sin n\xi - C_6 \cos \beta \gamma \cos n\xi + C_7 \sin \beta \gamma \sin n\xi \\
& - C_8 \sin \beta \gamma \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \} + (\alpha^2 + \beta^2) A_4 \{ (C_1 \sin \beta \gamma \sin n\xi - C_2 \sin \beta \gamma \\
& \times \cos n\xi - C_3 \cos \beta \gamma \sin n\xi + C_4 \cos \beta \gamma \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} - (C_5 \sin \beta \gamma \sin n\xi - \\
& C_6 \sin \beta \gamma \cos n\xi - C_7 \cos \beta \gamma \sin n\xi + C_8 \cos \beta \gamma \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}
\end{aligned}$$

ここに

$$A_1 = \frac{C}{2L^2 E h} \cdot \frac{1}{n\alpha} \{ \alpha^2 - n^2 + 2(1+\mu)\Omega^2 \} \{ \alpha^2 - n^2 + (1-\mu^2)\Omega^2 \}$$

$$A_2 = \frac{C}{2L^2 E h} \cdot \frac{1}{n\alpha} \{ (\alpha^2 + n^2)^2 - (1-\mu)(1+\mu)(\alpha^2 + n^2)\Omega^2 + 2(1+\mu)(1-\mu^2) \times \Omega^4 \}$$

$$A_3 = \frac{C}{2L^2 E h} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)n} \{ (\alpha^2 - \beta^2 - n^2)^2 - (1-\mu)^2 + (1-\mu)(1+\mu)(\alpha^2 - \beta^2 - n^2)\Omega^2 + 2(1+\mu)(1-\mu^2)\Omega^4 \}$$

$$A_4 = -\frac{C}{2L^2 E h} \cdot \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)n} \{ \alpha^2 - \beta^2 - n^2 + (1-\mu)(1+\mu)\Omega^2 \}$$

$$\begin{aligned}
\eta'' &= \eta + \eta_0 \\
\eta' &= \eta_0 - \eta
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \eta'' &= \eta + \eta_0 \\ \eta' &= \eta_0 - \eta \end{aligned}} \right\} \eta_0 : \pm \text{境界の値(正の側)} (= \frac{1}{2})$$

以上より入の値に応じて断面力、モーメントは求まる。  
変位を求めておくと次の様になる。

(10-1)の場合

$$\begin{aligned}
u' = & \frac{1}{L^2 E h} \cdot \frac{1}{n} \{ \alpha^2 + \mu n^2 + (1-\mu^2)\Omega^2 \} \{ (C_1 \sin n\xi - C_2 \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} + (C_3 \sin n\xi - C_4 \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}
\end{aligned}$$



$$u^2 = -\frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{\alpha} \{ n^2 + \mu \alpha^2 - (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \{ (C_1 \cos n\xi + C_2 \sin n\xi) e^{-\alpha \eta'} - (C_3 \times \\ \times \cos n\xi + C_4 \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

(10-2) の場合

$$u' = \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{n} \{ -\alpha^2 + \mu n^2 + (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \{ C_1 \cos \alpha \eta \sin n\xi - C_2 \cos \alpha \eta \cos n\xi \\ + C_3 \sin \alpha \eta \sin n\xi - C_4 \sin \alpha \eta \cos n\xi \}$$

$$u^2 = \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{\alpha} \{ -n^2 + \mu \alpha^2 + (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \{ C_1 \sin \alpha \eta \cos n\xi + C_2 \sin \alpha \eta \sin n\xi \\ - C_3 \cos \alpha \eta \cos n\xi - C_4 \cos \alpha \eta \sin n\xi \}$$

(10-3) の場合

$$u' = \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{n} \{ \alpha^2 - \beta^2 + \mu n^2 + (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \times \\ \times \{ (C_1 \cos \beta \eta \sin n\xi - C_2 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_3 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_4 \sin \beta \eta \cos n\xi) \\ \times e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \cos \beta \eta \sin n\xi - C_6 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_7 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_8 \sin \beta \eta \\ \times \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \} \\ + \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{2\alpha\beta}{n} \{ (C_1 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_2 \sin \beta \eta \cos n\xi - C_3 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_4 \times \\ \times \cos \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_6 \sin \beta \eta \cos n\xi - C_7 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_8 \\ \times \cos \beta \eta \cos n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

$$u^2 = \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{\alpha} \{ n^2 - \mu \alpha^2 - \mu \beta^2 - (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \times \\ \times \{ (C_1 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_2 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_3 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_4 \sin \beta \eta \sin n\xi) \times \\ \times e^{-\alpha \eta'} + (C_5 \cos \beta \eta \cos n\xi + C_6 \cos \beta \eta \sin n\xi + C_7 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_8 \sin \beta \eta \\ \times \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \} \\ - \frac{1}{L^2 E R} \cdot \frac{1}{\beta} \{ n^2 + \mu \alpha^2 + \mu \beta^2 - (1 - \mu^2) \Omega^2 \} \times \\ \times \{ (C_1 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_2 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_3 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_4 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta'} \\ + (C_5 \sin \beta \eta \cos n\xi + C_6 \sin \beta \eta \sin n\xi - C_7 \cos \beta \eta \cos n\xi - C_8 \cos \beta \eta \sin n\xi) e^{-\alpha \eta''} \}$$

以上の解を用いて境界において全ての未知積分定数と同  
時には零にならないための条件として未知定数の係数行

行列式が零という条件が得られる。即ち  $|(\alpha_{ij})| = 0$ 。これは  $\Omega^2$  の代数式と見做され、この根として固有振動数が決定される。この方法は球殻振動時と全く同じであるのでここでは記述を省略する。

ところで振動モードはある場合には原対称と逆対称に分離出来る。この場合には未知積分常数の数は半分に減じられる。境界条件を満足せしめるために境界条件を Fourier 展開することによって適当な  $n$  まで取るのであるが、一個の  $n$  に対して 16 個 (或は 8 個) の未知積分常数が出る故、 $n$  を数個以上取れば行列式の要素の数は非常に大きなものとなる。境界が固定、或は自由の場合  $n$  に関する無限級数和が零に等しくなるが計算は不可能である。尚、 $n$  の各々の項について  $|(\alpha_{ij})_n| = 0$  とすることは H.P. シェルでは不可能である。しかし固有振動数  $\Omega^2$  は  $n$  の個個に関する行列式をも零にするはずであるから  $n$  の個々についての  $\Omega^2$  を多く求め、 $n$  の値にかかわらず共通の  $\Omega^2$  を見出し得るならばそれはその境界条件に対する固有振動数である。このような方法の方が数値計算としては楽であるが、いずれにせよ非常に大型の高速電子計算機を用いねば固有振動数を厳正に求めることは不可能に近い。周辺が完全固定の場合、 $n$  が単に支持の場合には他の方法を用いることが出来る。これらの場合については後述する。

尚  $n$  を数個取るならば  $|(e^{\lambda_{n+1}in\tau} \pm e^{\lambda_{n+2}in\tau})| = 0$  の形を忘える必要はない。

## §3 近似度の検討

釣合式(1)の静的な場合には文献[2]によると断面力の応力関数表示は次のようになる。

$$n_{ij} = \epsilon^{ip} \epsilon^{jq} \phi|_{pq} + g_{ij} B \cdot \phi - g_{ij} \int \phi dB$$

$$\text{ここに } B = \frac{H_{11}H_{22} - (H_{12})^2}{g}, \quad \epsilon^{rs} : \frac{1}{\sqrt{g}}, -\frac{1}{\sqrt{g}}, 0 \text{ のいずれか}$$

$\varepsilon = \frac{1}{c}xy$  の場合  $B \doteq -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{c}$  である。又  $\phi|_{22} = \phi_{22}$ ,  $\phi|_{11} = \phi_{11}$ ,  $\phi|_{12} = \phi_{12} - \phi_1 \frac{L^2}{c^2} x^2 - \phi_2 \frac{L^2}{c^2} x^2$  である。今偏平であるとして  $\frac{L^2}{c^2} x^2, \frac{L^2}{c^2} x^2 \ll 1$  としてこれらの項を1に比して無視すると  $B = \text{const.}$  となり、又  $|\phi_{11}| \gg |\phi|$  であるから結局  $n_{ij} \doteq \frac{1}{g} \phi_{22}$  etc. とあらわされることになる。従って上述はこの程度の精度で展開されているから、変位と歪の関係についても次のように云える。一般に用いられる歪テンソル-変位関係式では剛体的運動に対して歪が零にならない。<sup>[3]</sup> この章で用いた歪-変位関係式を検討する。

通常用いられる関係式は、 $\nabla_i$  を共変微分として

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - x^2 \kappa_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - H_{ij} w$$

$$\kappa_{ij} = \nabla_j (u_i H_c^i + w_i c)$$

ところが既に用いた近似によると

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - H_{ij} w, \quad \kappa_{ij} = \nabla_j w_i$$

としている。ところが剛体変位において歪が零になるときは

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - H_{ij} w$$

$$\kappa_{ij} = \nabla_j (u_i H_c^i + w_i c) - \frac{1}{2} \epsilon_p (\epsilon H_j^p) \epsilon^{ab} \nabla_a u_b$$

である。 $\varepsilon_{ij}$ に関しては一致しているが $\kappa_{ij}$ に関しては一致していない。だが $\nabla_j u_k H^e$ と第二項とは同じ order であり、 $H^e \ll 1$ 、且つ $|w_{,i}| > |w|$  及  $u'' u_k$  と  $w$  の比較から  $\nabla_j u_k H^e$  の項はここでは無視可能であって同じ order の近似で後者も無視する。従ってここでは剛体的変位に対して歪テンソルが零になるかどうかの論議をする程度に order は全く無視出来るものとして取り扱っている。故に不都合な異が生ずる事はなく、この件に関しては問題にならない。

#### §4. Inextensional 振動と Extensional 振動との関係

Inextensional 振動 (板的振動) は  $u'$ ,  $u''$  の慣性項を無視した場合となる。 $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  も生じないから法線方向釣合式より、

$$\nabla \nabla w - k \Omega^2 w = 0 \quad \text{----- (11)}$$

$w = e^{\lambda x \pm i n y}$  或は  $e^{\lambda y \pm i n x}$  とおくと  $\lambda = \pm \sqrt{n^2 \pm \sqrt{k} \Omega^2}$  である。

全く方形板の振動となる。

周辺単純支持の場合の固有振動数を求めると次のように置けばよい。

$$w = \left( \frac{\cos}{\sin} \right) n \pi x \left( \frac{\cos}{\sin} \right) m \pi y$$

(但し正方形板とす。)

表 I

$n$	$m$	$\Omega^2$
1	1	0.00332171
1	2	0.0207606
1	3	0.0820727
2	2	0.0531473
3	3	0.2690584

$L/h = 100$ ,  $\mu = 0.15$  に対して (11) の  $\Omega^2$  を求めると表 I のようになる。

周辺固定の場合の正方形板の振動は Ritz の方法によりエネルギーの釣合から求めた文献<sup>(4)</sup>によると  $\Omega^2$  に換算して  $L/h=100$ ,  $\mu=0.15$  で表 II のようになる。

表 II

mode	$\Omega^2$
1st	0.0110424
2nd	0.0459422
3rd	0.0999351
4th	0.147733

Extensional 振動 (Scheibe 的振動) は  $w$  に関する慣性項を無視した場合と等なる。故に一般式 (8) で  $w$  を含まない項を無視した場合に相当し、次のようになる。

$$\Omega^2 \nabla \nabla \phi + \Omega^2 \left\{ (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2 - a \right\} \nabla \phi + \left\{ 2(1+\mu)\Omega^2 - a \right\} (1-\mu^2) \Omega^4 \phi - a \phi_{,1212} = 0 \quad (12)$$

$\phi = e^{\lambda x \pm i n y}$  或は  $e^{\lambda x \pm i n \pi y}$  とおくと特性値  $\lambda$  は次の様に見える。

$$\lambda = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}, \quad \chi = \lambda^2 - n^2$$

$$A = \left\{ a \left( 1 - \frac{n^2}{\Omega^2} \right) - (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2 \right\}$$

$$B = \left\{ a - 2(1+\mu)\Omega^2 \right\} (1-\mu^2)\Omega^2 - \frac{a n^4}{\Omega^2}$$

(12) 式でわかるようにここではライズ"の factor  $a$  が含まれている。 $a=0$  の場合、全くの scheibe の振動と等なる。尚  $a \neq 0$  の場合には (12) の  $\phi$  と一対一に対応する  $w$  が決定される。

(12) の解を  $\phi = \phi_0 \left( \frac{\cos}{\sin} \right) n \pi y \left( \frac{\cos}{\sin} \right) m \pi x$  とおいた場合 (正方形 H.P. シェル) の  $\Omega^2$  の値を求めると表 III のようになる。 $a$  の値にかかわらず  $n=m$  の場合には  $\Omega^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$  なる値が  $\Omega^2$  の

中に常に含まれる。

この場合釣合式

適合条件式より

$$N_x = N_y = N_{xy} = w = 0$$

が得られる。(これ

については後述す

る。) 与えられた  $\Omega^2$

表 III

$a$	$n$	$m$	$\Omega^2$
0	1	1	0, 8.58226, 20.19356
	1	2	0, 21.45566, 50.48370
	2	2	0, 34.32906, 80.77425
0.5	1	1	0.124427, 8.58226, 20.28653
	1	2	0.079615, 21.53405, 50.54330
	2	2	0.124857, 34.32906, 80.86679
1.0	1	1	0.247705, 8.58226, 20.38064
	1	2	0.158463, 21.61270, 50.31865
	2	2	0.249427, 34.32906, 80.95960

に対して境界条件を考慮するとモード、応力変形状態がわかる。ここでは Extensional 振動状態を解析することが目的ではないので詳述しない。

もし H.P. シェルの振動の解が Inextensional 振動と Extensional 振動の合成という形で存在するとするならば次のようにおいてみる。

$$(Inext. vib.) \cdot (Extens. vib) = 0$$

従って

$$x^4 + A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

$$\text{ここに } x = \lambda^2 - \mu^2$$

$$A' = (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2 - a\left(1 - \frac{\mu^2}{\Omega^2}\right)$$

$$B' = 2(1+\mu)(1-\mu^2)\Omega^2 - a\left\{(1-\mu^2) - \frac{\mu^4}{\Omega^4}\right\}\Omega^2 - k\Omega^2$$

$$C' = -kam^2 + k\Omega^2\left\{a - (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2\right\}$$

$$D' = -k\left\{2(1+\mu)\Omega^2 - a\right\}(1-\mu^2)\Omega^4 - kam^4$$

(9)と比較すると  $C' = C$ ,  $D' = D$  である。H.P. シェルの振動は Inextensional 振動と Extensional 振動に分離出来るものではない。従って厳正な H.P. シェル振動は Inextensional 振

動と Extensional 振動の中間に位置するものであることは容易に考えられる。Inexten. 振動の最低次の固有振動数から考えると厳正振動の最低次の  $\Omega^2$  はかなり小さいと考えられる。するとこの場合  $\alpha$  が存在すると  $A', B'$  に対して  $\alpha$  の影響が非常に大きいことがわかる。換言すれば低次モードの  $\Omega^2$  である程  $\alpha$  の値によって  $A'$  と  $A$ ,  $B'$  と  $B$  の相異は大きくなり、結局 Inexten. 的振動はライズの影響で大きく変り、Exten. 的振動の方へと  $\Omega^2$  は大きくなることが推察される。従ってライズがあると Inexten. 振動は存在しない。高次モードになり、或は  $\Omega^2$  が大きくなると ( $\Omega^2 \approx n^2$  程度以上)  $\alpha$  の影響は小さく、従って Exten. 的振動は Exten. 振動と同じに見える。  $\alpha = 0$  の場合は全く一致する。即ちライズのない場合には Inexten. 振動と Exten. 振動の共存であってこれは当然である。

### §5 プレストレスの存在する場合

釣屋根形式の場合にはプレストレスカの存在する場合が多い。ここではプレストレスカにより固有振動数がどのように変化するかを論じる。

初期緊張力を P.S. と略記する。以下の仮定を設ける。

- P.S. はアンチクラスチックカーブ (釣り方向及びバーチ方向) に沿って入るものとする。
- P.S. の強さはその方向の単位幅当りをもってあらわす。
- 交差する二方向の P.S. は相等しいとする。

・  $x, y$  方向の変位の変化に基づく P.S. の影響は外力としては無視する。

・  $t=0$  状態において微小要素に働く  $z$  方向 P.S. 成分は零と見做す。

§2と同様に式を樹立すると解  $\phi = e^{i\lambda z + i\pi \xi}$  の  $\lambda$  に対する特性方程式は次の様になる。法線方向運動方程式

$$2M^{12}H_{12} + g_{11}^1 + g_{12}^2 - \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} w \right) = P_z \quad \text{----- (13)}$$

$$P_z = -T \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) w \cdot \frac{1}{L^2}$$

と他の方向の運動方程式は(2)をそのまま用いて

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{----- (14)}$$

$$\text{ここに } x = \lambda^2 - \mu^2$$

$$A = (3-\mu)(1+\mu)\Omega^2 + 3k$$

$$B = 2(1+\mu)(1-\mu^2)\Omega^4 - k \{ 1 - \beta(3-\mu)(1+\mu) \} \Omega^2$$

$$C = k \{ a\Omega^2 - (3-\mu)(1+\mu)\Omega^4 + 2\beta(1+\mu)(1-\mu^2)\Omega^2 - a\mu^2 \}$$

$$D = \{ a - 2(1+\mu)\Omega^2 \} (1-\mu^2)k\Omega^4 - ka\mu^4$$

$$\beta = T/Ek \quad (T: \text{P.S.})$$

ところで通常ライズが存在すると  $\Omega^2 \geq 0(10^{-2})$  であり  $k \geq 0(10^4 \sim 10^5)$  である。もしコンクリート造とすると通常の  $\omega_c/\omega_n$  間は  $\beta \leq 0(10^{-4} \sim 10^{-5})$  となる。この場合上式に含まれる  $B, C, D$  内の  $\beta$  は無視可能となる。 $\beta$  の入るのは  $A$  のみであって代数式における根と係数の関係から  $\lambda$  に対して  $\beta$  の影響は極めて小さく、 $\lambda$  の一部が直に極くわずかな影響が出るのみである。しかし Young 率  $E$  が非常



に小さく、且つ P.S. が大きい場合には (例えば  $\beta \approx 0(10^{-2} \sim 10^{-1})$ ) P.S. の影響がかなり入ることは上からよく推察される。これらは後述の計算例で実際に示す。

尚固有振動数を求める段階において  $\Omega^2$  の相違は特性値入の相違のみが関係する故特性値入を (9), (14) から求めて比較を行なうと次のようになる。

- ・実根  $n$  が小さい範囲ではほとんど一致。 $n$  が大きくなると差が生じるが  $\Omega^2$  が太になると差は小さくなる。
  - ・虚根  $n = \pi$  で  $\Omega^2$  が大なる範囲以外では全く差違は見られない。
  - ・複素根  $n$  が大になるにつれて実部の値に差が生じる。P.S. のない方が実部は大きな値となる。
- これらより  $\beta$  がさして大きくないとき、 $n$  が小さい範囲では P.S. の影響の小さい事がわかる。

## §6 特性値より見た傾向

(9) 式を解く事は本計算が digital 型電子計算機によらねばならない点からもプログラムの作製と厳正根が得られるようにすればよいのであるが、小さい容量の計算機では 4 次方程式を解くためのプログラムの作製が容易ではない。 $\Omega^2$  の値によっては非常に条件の悪い高次方程式であるので Bairstow 又は Ferrari の定理に基づいてプログラムを作製すると長大なものになる。サフルティーンを有さないところでは解けな。ここではそのために Ferrari の定

理に基づく近似式を示しておく。記号は(9)を参照。

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{n^2 + X_{1,2}}$$

$$X_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ a \left( \frac{n^2}{\Omega^2} - 1 \right) \pm \sqrt{a^2 \left( \frac{n^2}{\Omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{4D}{B} - 4 \left( B + \frac{C^2 - ABC}{B^2} \right)} \right\}$$

$$X_{3,4} = \frac{1}{2} \frac{C}{B} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{BD}{C^2}} \right\}$$

上式の誘導と精度検討は当報告の本筋ではないので省略するが、入の有効数字4~5桁目に誤差があらわれる程度である。

固有振動数を決定し、それに基づく固有ベクトルを求めるならば、振動時の変形、応力状態は知り得るのであるが、通常かならずしも最低次モードだけが問題とならない。一般に $\Omega^2$ とモードとの関係を知ることは固有振動数を求めるための準備としても必要なことであり、又強制振動の場合シエルの *response mode* を与える  $\Omega^2$  との関連で知るためにも  $\Omega^2$  と変形との関係を知ることは意味のあることである。特性値入は通常の H.P. シエルでは  $\Omega^2 = 0 (10^{-2} \sim 10^{-1})$  程度である故、実数2、虚数2、複素数4、或は実数6、虚数6 のいずれかである。 $n=\pi$  の場合 ライズが低く  $\Omega^2 = 0.1 \sim 0.2$  程度では境界からの一様な急減衰モードと全域にわたる低次のゆったりしたモードとの間にかなりの減衰率をもつ高次波形の *oscillatory damping* がある。ライズが増すにつれて  $\Omega^2$  が増すと一様減衰波形はますますその性質を強め、低次モードの波はゆっくりとその距離に関する波長を短かくする。*oscillatory damping* 波はその減衰性がかなりの速度で減少していくが、モード自身は変化しない。 $\Omega^2 = 0.2$  程度以上になると *oscillatory damping* の

減衰性がなくなり、従って一様減衰と低次及び高次モード2個の共存となる。 $\Omega^2$ の増加につれて低次モードはゆっくりと高次モードへ移行してくる。しかしそのうち一つは距離に対する波長が長くなり低次モードとして残る。これがさらに長くなると高次モードと一諸になって *oscillatory damping* 波形へ変る。ところで *Inextensional* 振動及び *Extensional* 振動と比較を試みるに *Inexten.* 振動では  $\Omega^2 = 0.1 \sim 0.5$  では境界より一様減衰と高次モード, *Exten.* 振動では低次モード及び高次モードの振動波形である。この関係は  $\Omega^2$  が小さくても変らない。又,  $\Omega^2$  が増加すれば *Exten.* 振動の方は高次モードは低次へ, 低次モードは高次へと移行し  $\Omega^2 = 0.95$  で両者は一致し, しかる後 *oscillatory damping* 波形となる。以後  $\Omega^2$  が増加するにつれて減衰性は増し, 高次モードは低次へとなり全域的な振動性状となる。即ち厳正式における  $\Omega^2$  が小さい場合の *oscillatory damping* は後音達には存在しない。

$n = 2\pi, n = 3\pi$  においても以上の記述はほとんどそのまま適用出来る。

法線方向慣性項のみを考慮した場合, 特性値を記すと,

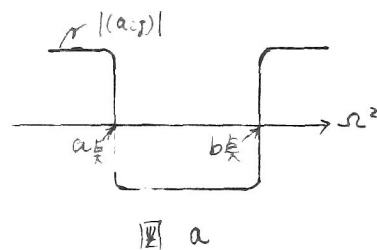
$$\chi^4 - k\Omega^2\chi^2 - k\alpha n^2\chi - k\chi n^4 = 0 \quad \chi = \lambda^2 - n^2$$

である。(1)との比較を行なうと  $\Omega^2 \approx r(10^{-2} \sim 10^{-1})$  で  $\alpha = \alpha(10^{-1})$  程度の場合充分の近似で法線方向慣性項のみで充分であると云える。 $\Omega^2$  の大なる直に対しては  $\alpha$  が小さい範囲ではかなりの誤差を生じることがわかる。特性値の極く

微小な変化が係数行列式  $|A|$  に大きく変わる(§7参照)ことを考えると、特性値のみからは近似の程度を示すことは不可能である。

§2, §6 の記述では入が等根をとる場合については何らふれなかった。入が等根をとる場合もその入での  $\Omega^2$  が固有振動数であるかどうかのチェックをするのみであって、あえて解を求める必要がないからである。ところで係数行列式の値が  $\Omega^2$  の関数である故、 $\Omega^2$  に関して連続であるがこの値が零になるときの  $\Omega^2$  がかならずしも固有振動数と見做せない場合があるがそれが入が等根の場合である。§2の解のみを用いて係数行列式を求めると特性値入が等根に近づくと常に行列式  $|(\alpha_{ij})| = 0$  となる。が実際には他の根をここでは入れてやらねばならない。換言すると  $\Omega^2$  に応じて  $|(\alpha_{ij})| = 0$  となるので  $\Omega^2$  は固有振動数と見做されるが、実際はそうではない。従って別の解が必要とされて  $|(\alpha_{ij})| \neq 0$  となりその時の  $\Omega^2$  が固有振動数でないことが示されることになる。尚この時

の  $|(\alpha_{ij})| = 0$  に対する  $\Omega^2$  は図 a の如く  $a, b$  共に入が等根に存つてどちらも固有振動数と見做せないようになっている。もし  $a$  共、或は  $b$  共が不等根の場合にはその等根に対応する  $\Omega^2$  は固有振動数と見做される。



## §7 計算例

a) 周辺単純支持を含むある特定の境界条件の場合

以下正方形プランの場合を取り扱うことにする。(8)式の解が次の形である場合を取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\pi\xi \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} m\pi\eta \\ w &= w_0 \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} n\pi\xi \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} m\pi\eta \end{aligned} \right\} \text{----- (14)}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \xi, \eta \leq \frac{1}{2}$$

$\phi$  が  $\cos$  に対して  $w$  は  $\sin$ 、 $\phi$  が  $\sin$  に対して  $w$  は  $\cos$  の形が対応する。(8)式に代入すれば直ちに  $\nabla^2$  に関する3次方程式が得られる。境界条件としては次のようになる。

i)  $\phi: \cos, \sin$ 、 $w: \sin, \cos$  の場合

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \text{で}$$

$$n: \text{偶数} \quad w=0, \quad N_x=N_y=\cos m\pi\eta, \quad u=0, \quad v=\sin m\pi\eta$$

$$n: \text{奇数} \quad w=\sin m\pi\eta, \quad N_x=N_y=0, \quad u=\cos m\pi\eta, \quad v=0$$

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \text{で}$$

$$m: \text{偶数} \quad w=0, \quad N_x=N_y=\cos n\pi\xi, \quad u=\sin n\pi\xi, \quad v=0$$

$$m: \text{奇数} \quad w=\sin n\pi\xi, \quad N_x=N_y=0, \quad u=0, \quad v=\cos n\pi\xi$$

ii)  $\phi: \cos, \sin$ 、 $w: \sin, \cos$  の場合

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \text{で}$$

$$n: \text{偶数} \quad w=0, \quad N_x=N_y=\sin m\pi\eta, \quad u=0, \quad v=\cos m\pi\eta$$

$$n: \text{奇数} \quad w=\cos m\pi\eta, \quad N_x=N_y=0, \quad u=\sin m\pi\eta, \quad v=0$$

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \text{で}$$

$$m: \text{偶数} \quad w=\sin n\pi\xi, \quad N_x=N_y=0, \quad u=0, \quad v=\cos n\pi\xi$$

$$m: \text{奇数} \quad w=0, \quad N_x=N_y=\cos n\pi\xi, \quad u=\sin n\pi\xi, \quad v=0$$

iii)  $\phi: \sin, \cos$      $\psi: \cos, \sin$

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \pi$$

$$n: \text{偶数} \quad w = \sin n\pi\eta \quad N_x = N_y = 0 \quad u = \cos m\pi\eta \quad v = 0$$

$$n: \text{奇数} \quad w = 0 \quad N_x = N_y = \cos m\pi\eta \quad u = 0 \quad v = \sin m\pi\eta$$

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \pi$$

$$n: \text{偶数} \quad w = 0 \quad N_x = N_y = \cos n\pi\xi \quad u = 0 \quad v = \sin n\pi\xi$$

$$m: \text{奇数} \quad w = \cos n\pi\xi \quad N_x = N_y = 0 \quad u = 0 \quad v = \sin n\pi\xi$$

iv)  $\phi: \sin, \sin$      $\psi: \cos, \cos$

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \pi$$

$$n: \text{偶数} \quad w = \cos m\pi\eta \quad N_x = N_y = 0 \quad u = \sin m\pi\eta \quad v = 0$$

$$n: \text{奇数} \quad w = 0 \quad N_x = N_y = \sin m\pi\eta \quad u = 0 \quad v = \cos m\pi\eta$$

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \pi$$

$$m: \text{偶数} \quad w = \cos n\pi\xi \quad N_x = N_y = 0 \quad u = 0 \quad v = \sin n\pi\xi$$

$$n: \text{奇数} \quad w = 0 \quad N_x = N_y = \sin n\pi\xi \quad u = \cos n\pi\xi \quad v = 0$$

従って単純支持の場合も含まれる。

尚 振動モードは正方形プランである故一意的に決定され得ない。(4)の形を用いた古典理論に基づく正方形膜の振動が応用数学の多くの教科書に記載されておりモードが論じられてゐるが、これとここで論じたモードとは一致する。従つてこれ以一記述しない。

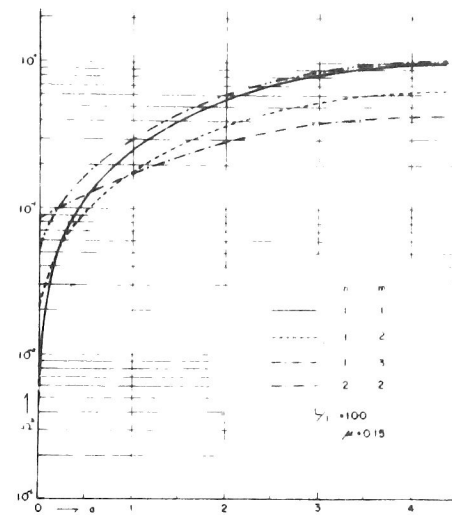
a-1) 初張力 (F.0.) の存在しない場合

表 I 及び 図 I にその値と傾向を示す。  $n = m$  の場合

$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  がライズに關係なく含まれる。この場合には恒等的に断面力 変位 断面モーメントは零である。これ

は Extensional 的要素から出て来るものであって、 $\eta$  軸に対する対称性から  $n=m$  の場合には振動に関係しない量が入ることは容易に推察されるのである。

表 I 及び図 I より注意されるべき事は ライスがまじると  $L_1$  がある程度以上大なる場合 最低次モードと考えられる  $n=m=1$  よりも高次形モード (例えば  $n=1, m=3$  等) の固有振動数の方が低い値を示す点である。これは板や壁板の振動からは全く推察され得ないことである。又各  $n, m$  について最低値の  $\Omega^2$  が厚さ、ライスの影響を非常に受けることがわかる。これらは Inextensional 振動から発生するものである。同一の  $n, m$  において  $\Omega^2$  の高い値は厚さ、ライスの影響をほとんど受けない。



#### a-2) 初張力 (P.S.) の存在する場合

初張力を変えた場合の  $\Omega^2$  の値を  $L_1, L_2$  について表 II に示す。

プレストレスがある程度以下 (現実的にはこの範囲である。) の場合には P.S. の影響のほとんどないことがわかる。

#### b) 周辺4角で固定の場合

$\S 2$  で導いた解を用いる場合の例である。正方形プラ

表 I 周辺単純支持 (P.S. 系)  $\Omega^2 \quad l/r = 100$  $u = +250000000+00$ 

1	1	+858226460+01	+202399102+02	+656709867-01
1	2	+214948633+02	+505135496+02	+606142746-01
1	3	+429810408+02	+100984484+03	+105354117+00
1	4	+730341593+02	+171655548+03	+253523984+00
1	5	+111662528+03	+262523182+03	+570123644+00
2	2	+343290604+02	+808205137+02	+115581132+00
2	3	+558008468+02	+131297591+03	+193482535+00
2	4	+858619370+02	+201965268+03	+371945927+00
2	5	+124500167+03	+292828618+03	+727725618+00
3	3	+772403820+02	+181788354+03	+331473946+00
3	4	+107286874+03	+252462221+03	+576473397+00
3	5	+145622738+03	+343326644+03	+100835933+01
4	4	+137316240+03	+323143337+03	+912726401+00
4	5	+175941112+03	+414012164+03	+145523743+01
5	5	+214556617+03	+504885474+03	+213837102+01

 $u = +100000000+01$ 

1	1	+858226470+01	+203806719+02	+250996044+00
1	2	+216128547+02	+506032363+02	+179022832+00
1	3	+431903818+02	+101034775+03	+171810719+00
1	4	+732889763+02	+171686422+03	+293917193+00
1	5	+111941829+03	+262543793+03	+596298036+00
2	2	+343290594+02	+809597306+02	+302452825+00
2	3	+558493102+02	+131416170+03	+352526887+00
2	4	+859799080+02	+202054349+03	+490981975+00
2	5	+124672214+03	+292894919+03	+815545706+00
3	3	+772403820+02	+181927385+03	+518529643+00
3	4	+107312595+03	+252590389+03	+748670739+00
3	5	+145995483+03	+343434989+03	+115335814+01
4	4	+137316241+03	+323282420+03	+109972618+01
4	5	+175957561+03	+414144634+03	+163300860+01
5	5	+214556621+03	+505024713+03	+232521250+01

 $u = +400000000+01$ 

1	1	+858226470+01	+209698356+02	+966180240+00
1	2	+220901571+02	+509736897+02	+635615099+00
1	3	+440303985+02	+101240296+03	+430620252+00
1	4	+743094039+02	+171811700+03	+452561660+00
1	5	+113059561+03	+262627052+03	+699654038+00
2	2	+343290595+02	+815230576+02	+104347398+01
2	3	+560444114+02	+131894898+03	+983045897+00
2	4	+864532420+02	+202413542+03	+962801160+00
2	5	+125361473+03	+293161553+03	+116399956+01
3	3	+772403810+02	+182486381+03	+126388227+01
3	4	+107415856+03	+253105273+03	+143487417+01
3	5	+146287123+03	+343870076+03	+173097984+01
4	4	+137316241+03	+323840385+03	+184610977+01
4	5	+176021111+03	+414675811+03	+234262752+01
5	5	+214556618+03	+505582736+03	+307154300+01

但  $l + 0.1 \times 10^n = +1+n$  (例:  $45 = +45+0$ )



表I 周正单纯支持 (P.S.L)  $\Omega^2$   $g_R=200$  $u = +250000000+00$ 

1	1	+858226470+01	+202399043+02	+631854278-01
1	2	+214948344+02	+505135412+02	+450813524-01
1	3	+429809398+02	+100984474+03	+431834829-01
1	4	+730339519+02	+171655534+03	+737491469-01
1	5	+111662177+03	+262523170+03	+149459599+00
2	2	+343290602+02	+808204909+02	+757434732-01
2	3	+558008169+02	+131297559+03	+882879979-01
2	4	+858618240+02	+201965230+03	+122968541+00
2	5	+124499922+03	+292828667+03	+204214773+00
3	3	+772403810+02	+181788302+03	+129731591+00
3	4	+107286843+03	+252462154+03	+187307703+00
3	5	+145922616+03	+343323578+03	+288574613+00
4	4	+137316238+03	+323143251+03	+275049958+00
4	5	+175941678+03	+414012060+03	+408419745+00
5	5	+214556614+03	+504885337+03	+581463618+00

 $u = +100000000+01$ 

1	1	+858226470+01	+203805487+02	+248527920+00
1	2	+216127403+02	+506032006+02	+163603001+00
1	3	+431899801+02	+101034730+03	+109973182+00
1	4	+732881405+02	+171686380+03	+114800751+00
1	5	+111940427+03	+262543747+03	+176718279+00
2	2	+343290608+02	+809595363+02	+262683944+00
2	3	+558491902+02	+131416041+03	+247519179+00
2	4	+859794520+02	+202054199+03	+242457100+00
2	5	+124671245+03	+292894768+03	+292877506+00
3	3	+772403810+02	+181927179+03	+316941787+00
3	4	+107312471+03	+252590125+03	+359796430+00
3	5	+145995002+03	+343434692+03	+434160539+00
4	4	+137316238+03	+323282063+03	+462324531+00
4	5	+175957435+03	+414144190+03	+586620881+00
5	5	+214556614+03	+505024152+03	+768735087+00

 $u = +400000000+01$ 

1	1	+858226470+01	+209697390+02	+963785635+00
1	2	+220897044+02	+509735356+02	+620651731+00
1	3	+440288107+02	+101240123+03	+370098529+00
1	4	+743061014+02	+171811523+03	+276044911+00
1	5	+113054003+03	+262626872+03	+284365998+00
2	2	+343290611+02	+815226829+02	+100398417+01
2	3	+560439221+02	+131894382+03	+878793898+00
2	4	+864514170+02	+202412948+03	+716091323+00
2	5	+125357619+03	+293160923+03	+644696646+00
3	3	+772403820+02	+182485552+03	+106291638+01
3	4	+107415355+03	+253104213+03	+104717249+01
3	5	+146285200+03	+343868863+03	+101413930+01
4	4	+137316237+03	+323838924+03	+120981130+01
4	5	+176020604+03	+414674024+03	+129796576+01
5	5	+214556612+03	+505580448+03	+151678949+01

但  $u + 0.1 \times 10^n = +1+n$  (例如  $0.45 = +45+0$ )

表 II 周辺準拠支持  $\Omega^2$ 

$\beta = -5-1$

$\nu_h = 100$

$Q = +000000000-00$

1	1	+695470690+01	+208335034+02	+397935120-02
1	2	+173840027+02	+520840839+02	+248384727-01
1	3	+347587075+02	+104169303+03	+297707116-01
1	4	+590675870+02	+177020501+03	+287232152+00
2	2	+278099451+02	+833350820+02	+635914747-01
2	3	+451790475+02	+135420974+03	+167961298+00
2	4	+694800460+02	+208343122+03	+397683662+00
3	3	+625387840+02	+187507996+03	+327090623+00
3	4	+868266010+02	+260431726+03	+621541388+00
4	4	+111095877+03	+333357657+03	+101870413+01

$Q = +250000000+00$

1	1	+694610100+01	+208761109+02	+786733288-01
1	2	+174159677+02	+521131414+02	+725166010-01
1	3	+348221966+02	+104187839+03	+126041673+00
1	4	+591468060+02	+177103840+03	+303420344+00
2	2	+278013575+02	+833776126+02	+138343356+00
2	3	+451871243+02	+135457962+03	+231591099+00
2	4	+695120750+02	+208372166+03	+445305260+00
3	3	+625301520+02	+187550539+03	+396874158+00
3	4	+868268050+02	+260471345+03	+690412742+00
4	4	+111087170+03	+333402242+03	+109352334+01

$Q = +100000000+01$

1	1	+691945510+01	+210054580+02	+302059234+00
1	2	+175125928+02	+522009417+02	+214178091+00
1	3	+350130437+02	+104243707+03	+205414485+00
1	4	+593846150+02	+177143978+03	+351560571+00
2	2	+277753936+02	+835055845+02	+362422137+00
2	3	+452114525+02	+135562177+03	+422134093+00
2	4	+696083460+02	+208459462+03	+587825279+00
3	3	+625041670+02	+187678340+03	+621145636+00
3	4	+868274190+02	+260520332+03	+896898765+00
4	4	+111061007+03	+333528076+03	+131793709+01

$Q = +400000000+01$

1	1	+679808690+01	+215460928+02	+118714041+01
1	2	+179098082+02	+525619646+02	+760287622+00
1	3	+357818550+02	+104471155+03	+513502116+00
1	4	+603380350+02	+177306384+03	+540081503+00
2	2	+276684015+02	+840231976+02	+125614926+01
2	3	+453102473+02	+136017787+03	+117907739+01
2	4	+699961780+02	+208811067+03	+115273596+01
3	3	+623988550+02	+188192081+03	+151706335+01

表 II 用辺单纯支持  $\Omega^2$   $\beta = -5-1$   $l/a = 100$  $\alpha = +000000000-00$ 

1	1	+695470690+01	+208335034+02	+397935120-02
1	2	+173840027+02	+520840739+02	+248384727-01
1	3	+347587075+02	+104169303+03	+993707116-01
1	4	+590675870+02	+177090501+03	+287232152+00
2	2	+278099451+02	+833350820+02	+635914747-01
2	3	+451790475+02	+135420974+03	+167961298+00
2	4	+694800460+02	+208343122+03	+397683662+00
3	3	+625387840+02	+187507996+03	+327090623+00
3	4	+868266010+02	+260431726+03	+621541388+00
4	4	+111095877+03	+333357657+03	+101870413+01

 $\alpha = +250000000+00$ 

1	1	+694610100+01	+208761109+02	+786733288-01
1	2	+174159677+02	+521131414+02	+725166010-01
1	3	+348221966+02	+104187839+03	+126041673+00
1	4	+591468060+02	+177103840+03	+303420344+00
2	2	+278013575+02	+833776126+02	+138343856+00
2	3	+451871243+02	+135457962+03	+231591099+00
2	4	+695120750+02	+208370166+03	+445305260+00
3	3	+625301520+02	+187550539+03	+396874158+00
3	4	+868268050+02	+260471345+03	+690412742+00
4	4	+111087170+03	+333400242+03	+109352334+01

 $\alpha = +100000000+01$ 

1	1	+691945510+01	+210054580+02	+302059234+00
1	2	+175125928+02	+522009417+02	+214178091+00
1	3	+350130437+02	+104243707+03	+205414485+00
1	4	+593846150+02	+177143978+03	+351560571+00
2	2	+277753936+02	+835055845+02	+362422137+00
2	3	+452114525+02	+135569177+03	+422134093+00
2	4	+696083460+02	+208459462+03	+587825279+00
3	3	+625041670+02	+187678340+03	+621145636+00
3	4	+868274190+02	+260590332+03	+896898765+00
4	4	+111061007+03	+333528076+03	+131793709+01

 $\alpha = +400000000+01$ 

1	1	+679808690+01	+215460928+02	+118714041+01
1	2	+179098082+02	+525619646+02	+760287622+00
1	3	+357818550+02	+104471155+03	+513502116+00
1	4	+603380350+02	+177306384+03	+540081503+00
2	2	+276684015+02	+840231976+02	+125614926+01
2	3	+453102473+02	+136017787+03	+117907739+01
2	4	+699961780+02	+208811067+03	+113273596+01
3	3	+623988550+02	+188192081+03	+151706335+01

ンの場合を対象とする。 $(-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2})$ 。又原真に対して対称なモードのみを考える。即ち  $(\xi, \eta) = (-\xi, -\eta)$  であって未知数は 8 個となる。境界の 4 つの辺上で一箇所ずつ固定するのであるからこの 4 でのみ境界をあわせればよく、従って 4 の個々の値において  $\Omega^2$  を決定することが可能になり、8 行 8 列の行列式の根を求める問題となる。支持真以外の辺上での境界は未定である。多く決定される  $\Omega^2$  の各々に対して行列式の固有ベクトルからそれを決定することが出来る。

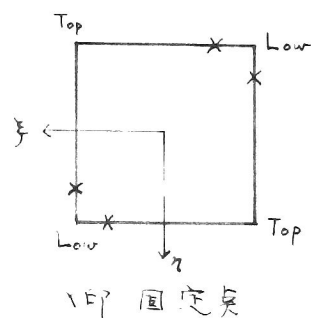
ここでは 4 の個々についてライズ" 厚さが決められた場合より最小値の  $\Omega^2$  を求める。モードは H.P. エルが正方形プラン板一意的に決らず、 $A_1 e^{i\eta \pm i\eta \xi} \pm A_2 e^{i\eta \pm i\eta \xi}$  として  $A_1, A_2$  の比から決まる。 $A_1 = 0$  或は  $A_2 = 0$  の場合の固有ベクトルを同時に示す。

固定真を図の如く定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0.5 \\ \eta = 0.3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = -0.5 \\ \eta = -0.3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0.3 \\ \eta = 0.5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi = -0.3 \\ \eta = -0.5 \end{array} \right\}$$

この点で  $w = u = v = w_\xi$  (或は  $w_\eta$ ) = 0

が境界条件となる。



計算は京都大学電子計算機 KDC-I によった。その計算順序を述べる。8 行 8 列の行列式  $(a_{ij})$  の要素  $a_{ij}$  は  $\Omega^2$  の explicit な函数ではない。従って適当な  $\Omega^2$  を与えて (1) を解き、その根入の type (10-1) ~ (10-3) に従って  $w_\xi$  (或は  $w_\eta$ ) を求めよとする。  $(a_{ij})$  の値は 3 行 3 列を作る cholesky の方法<sup>(5)</sup> で求め、値が零でなければ  $\Omega^2$  の値

を変えて同じ操作をくりかえし  $|a_{ij}|$  が零になるときの  $\Omega^2$  を求める。板の場合の振動数は既知故、これを出発点としてラィズ要素  $n$  の変化に対して最小値  $\Omega^2$  を追っていくことにより  $\Omega^2$  の最小値であることの判別を行なった。

ところで固有値問題では常に出会うことであるが、行列が増すと  $|a_{ij}|$  の値は急激に増加し、 $\Omega^2$  に対して滑らかな曲線にならず step-function 的な様相を示す。又ここでは  $\Omega^2$  の微小の変化によって  $|a_{ij}|$  は大きく変る。一例を示す。

特性値と  $|a_{ij}|$  の通う関係を見る  
と既述の Inertional 振動 Extensional 振動を考えて次のように云える。

$n=\pi$	$\mu=1.00$	$L/R=100$
$\Omega^2$	$ a_{ij} $	
0.400	+51463	+14
0.2450	+12683	+14
0.245	+68925	+10
0.2146	-51123	+11
0.2500	-22814	+12
$(0.1 \times 10^n \rightarrow +1+n \text{ と表す})$		

- ・  $\Omega^2$  が小さいところ ( $\Omega^2 = 0(10^{-2} \sim 10^{-1})$ ) では Inert. 部の影響が非常に大であつて Extens. 部の影響はさして小さい。
- ・  $\Omega^2$  が中程度 ( $\Omega^2 = 0(10^{-1} \sim 10^0)$ ) では Inertens. 部の影響が一番大きいとは云ふ、Extens. 部、これもかなり大きくなる。
- ・  $\Omega^2$  が大きくなると ( $\Omega^2 \geq 0(1)$ )、Inertens. 部の全体的なもの、Extens. 部も大きな影響をもつ、特に後者のそれは大きい。

計算結果を  
表Ⅲ (i)~(ii)  
及び図Ⅱに示す。

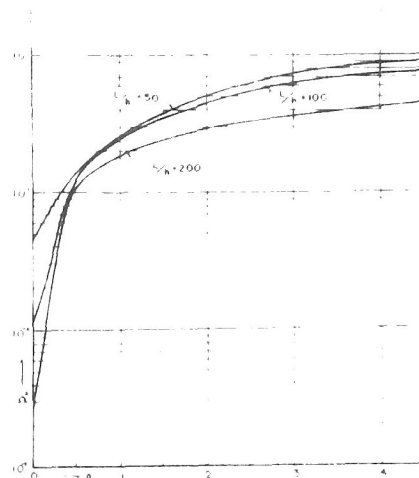
表Ⅲ 与えられた $n$ による $\Omega^2$ の変化			
$L$	$L_h = 50$	$L_h = 100$	$L_h = 200$
0	0.04392	0.01098	0.0027+05
0.25	0.08505	0.038+05	
0.50	0.14+5	0.12905	0.11300
1.00	0.26175	0.24155	0.18850
2.00	0.51120	0.475+0	0.29655
4.00	0.81700	0.72850	0.43405

表Ⅲ  $\Omega^2$  の値  $n=\pi$ ,  $\mu=0.15$ 

$u$	I	II
0	4.0000	1.0520
0.25	2.2175	
0.50	1.1010	1.1420
1.00	0.2788	1.3258
2.00	1.1471	1.5022
4.00	1.2313	1.6786

$$\text{I} \quad \frac{\Omega^2(Lh=50)}{\Omega^2(Lh=100)}$$

$$\text{II} ; \frac{\Omega^2(Lh=100)}{\Omega^2(Lh=200)}$$

表Ⅲ  $n$  の変化による  $\Omega^2$   $Lh=100$   $\mu=0.15$ 

$u$	$n = \pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
0	0.61193	0.64545	0.09965	0.1475
0.25	0.638405	0.6562	0.1365	0.3020
0.50	0.12905	0.2302	0.3655	0.5875
1.00	0.24955	0.3400	0.4865	0.6730
2.00	0.44540	0.5735	0.7255	
4.00	0.72850	0.7500		

c) 固定の場合

2) 場合と同様に境界条件を満たすような解の形を作ることが可能である。次に、この直交数列を作る。

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{n,m} A_{nm} \left( \frac{\cosh \alpha_n \xi}{\cosh \alpha_n} - \frac{\cos \alpha_n \eta}{\cos \alpha_n} \right) \left( \frac{\cosh \alpha_m \eta}{\cosh \alpha_m} - \frac{\cos \alpha_m \xi}{\cos \alpha_m} \right) \\
 &+ \sum_{p,q} 2A_{pq} \left( \frac{\sinh \beta_p \xi}{\sinh \beta_p} - \frac{\sin \beta_p \eta}{\sin \beta_p} \right) \left( \frac{\sinh \beta_q \eta}{\sinh \beta_q} - \frac{\sin \beta_q \xi}{\sin \beta_q} \right) \\
 &= \sum_{n,m} A_{nm} X_n(\xi) Y_m(\eta) + \sum_{p,q} 2A_{pq} \tilde{X}_p(\xi) \tilde{Y}_q(\eta) \quad (15)
 \end{aligned}$$

表  $n=\pi$   $L_R=100$  特性値 および固有ベクトル

a	0	0.25	0.50	1.00	2.00	4.00
Type*	I	II	II	I	I	I
特性値 $\lambda$	$\pm 3.13988$ $\pm 5.10083i$ $\pm 11.2934i$ $\pm 4.39680i$	$\pm 9.98359$ $\pm 1.49265i$ $\pm 2.75771$ $\pm 6.05399i$	$\pm 12.2286$ $\pm 9.48483i$ $\pm 0.32868$ $\pm 3.22003i$	$\pm 14.0861$ $\pm 2.95747i$ $\pm 11.7909i$ $\pm 3.46224i$	$\pm 16.0567$ $\pm 2.33536i$ $\pm 13.9595i$ $\pm 4.41350i$	$\pm 18.0322$ $\pm 1.95922i$ $\pm 15.4429i$ $\pm 5.48227i$
$C_1$	0.46586	5.99088	0.74227	0.015958	0.032296	0.015596
$C_2$	-0.24116	-3.57440	-0.64102	-0.016798	-0.045048	-0.091037
$C_3$	0.20420	39.0072	0.23793	-0.52372	-0.34745	-0.20636
$C_4$	-0.44762	10.5221	-0.13390	-0.65016	-0.131179	0.023227
$C_5$	0.012231	-2.39897	0.16601	0.0007013	0.00099133	-0.021069
$C_6$	0.026997	9.18460	0.20692	0.011379	0.021133	0.11039
$C_7$	-0.24769	7.21865	0.10860	0.42647	0.162593	-0.25181
$C_8$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

\* Type I とは  $\lambda$  が実根 2 虚根 6, Type II とは実根 2 虚根 2, 複素根 4 をとる場合である。

又  $C_1, C_2$  は 実根に対するもの,  $C_3, C_4$  は虚根に対するものであって  $C_5 \sim C_8$  は Type I では虚根に対する

もの, Type II では複素根に対するものであり,  $C_1 \sim C_8$  はその上に記す特性値  $\lambda$  の値の順に従っている。

$$\begin{aligned}
\phi &= \sum_{n,m} B_{nm} \left( \frac{\cosh \chi_n \xi}{\cosh \chi_n} + \frac{\cosh \chi_m \eta}{\cosh \chi_m} \right) \left( \frac{\cosh \chi_n \xi}{\cosh \chi_n} + \frac{\cosh \chi_m \eta}{\cosh \chi_m} \right) \\
&+ \sum_{p,q} 2B_{pq} \left( \frac{\sinh \beta_p \xi}{\cosh \beta_p} + \frac{\sinh \beta_q \eta}{\cosh \beta_q} \right) \left( \frac{\sinh \beta_p \xi}{\cosh \beta_p} + \frac{\sinh \beta_q \eta}{\cosh \beta_q} \right) \\
&= \sum_{n,m} B_{nm} \chi_n(\xi) \chi_m(\eta) + \sum_{p,q} 2B_{pq} \Xi_p(\xi) \Xi_q(\eta) \quad \dots (16)
\end{aligned}$$

ここに  $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$  である。

境界において  $u = u' = u'' = u''' = 0$  を満たすためにはポア

ソン比を求めると

$$\begin{aligned}
\tanh \chi_n + \tanh \chi_n &= 0 \longrightarrow \chi_n \approx \frac{4n-1}{4} \pi, \chi_1 = 2.36504 \\
\tanh \beta_p - \tanh \beta_p &= 0 \longrightarrow \beta_p \approx \frac{4p+1}{4} \pi
\end{aligned} \quad \dots (17)$$

より  $\chi_n, \beta_p$  は決定される。 $\chi_n, \beta_p$  においても全く同じである。

次にポアソン比のみを考慮した場合の運動方程式を考へる。

$$\begin{aligned}
V^* V^* \phi - E \hbar \lambda \omega_{12} &= 0 \\
-D V^* V^* u + E \hbar L_x^2 \Omega^2 u - E \lambda \phi_{12} &= 0
\end{aligned} \quad \dots (18)$$

$$\text{ここに } x = L_x^2 / c, \lambda = L_x / L_y, \chi = L_x \xi, y = L_y \eta, \Omega^2 = \frac{\rho \hbar L_x^2}{E \hbar} \omega^2$$

$$\nabla^2 = \{ ( )_{11} + \lambda^2 ( )_{22} \}, \quad L_x, L_y \text{ : 半辺長}$$

(15), (16) を (18) に代入すると

$$\begin{aligned}
&B_{nm} (\chi_n^4 + \lambda^4 \chi_m^4) \chi_n \chi_m + B_{nm} 2\lambda^2 \chi_n^2 \chi_m^2 \chi_n \chi_m - E \hbar \lambda \chi_n \chi_m \\
&\times U_n V_m A_{nm} + 2B_{pq} (\beta_p^4 + \lambda^4 \beta_q^4) \Xi_p \Xi_q + 2B_{pq} 2\lambda^2 \beta_p^2 \beta_q^2 \Xi_p \Xi_q - \\
&- E \hbar \lambda \beta_p \beta_q U_p V_q A_{pq} = 0 \quad \dots (19-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{ -D(\chi_n^4 + \lambda^4 \chi_m^4) + E \hbar L_x^2 \Omega^2 y A_{nm} \chi_n \chi_m - D \cdot 2\lambda^2 \chi_n^2 \chi_m^2 \chi_n \chi_m A_{nm} \\
&- E \lambda \chi_n \chi_m U_n V_m A_{nm} + \{ -D(\beta_p^4 + \lambda^4 \beta_q^4) + E \hbar L_x^2 \Omega^2 \} 2\lambda^2 \beta_p \beta_q \Xi_p \Xi_q \\
&- D \cdot 2\lambda^2 \beta_p^2 \beta_q^2 \Xi_p \Xi_q A_{pq} - E \lambda \beta_p \beta_q U_p V_q A_{pq} = 0 \quad \dots (19-2)
\end{aligned}$$

ここに



$$U_m = \left( \frac{\sinh \alpha_n \xi}{\cos \alpha_n} + \frac{\sinh \beta_n \xi}{\cos \beta_n} \right) \quad (V_m; \xi \rightarrow \tau)$$

$$u_p = \left( \frac{\cosh \beta_p \xi}{\cos \beta_p} - \frac{\cosh \beta_p \xi}{\cos \beta_p} \right) \quad (v_p; \xi \rightarrow \tau)$$

$$\omega_n = \left( \frac{\sinh \beta_n \xi}{\cosh \alpha_n} - \frac{\sinh \alpha_n \xi}{\cosh \alpha_n} \right) \quad (T_m; \xi \rightarrow \tau)$$

$$\phi_p = \left( \frac{\cosh \beta_p \xi}{\cosh \beta_p} + \frac{\cosh \beta_p \xi}{\cos \beta_p} \right) \quad (x_p; \xi \rightarrow \tau)$$

ところで  $\lambda_n, \gamma_m, \beta_p, \beta_p$  の級数列は各々正規直交列であることは容易に示される。(イV部参照) 従って他の函数列をこれらを用いて展開する。

$$\chi_n = \sum_{i=1}^{\infty} k_{in} \chi_i \quad ; \quad k_{in} = -\frac{x_i^2}{x_n^2} - (x_n \tanh \alpha_n - x_i \tanh \alpha_i)$$

$$k_{nn} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cosh^2 \alpha_n} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_n} \right) + \frac{1}{x_n} \tanh \alpha_n$$

$$\gamma_m = \sum_{j=1}^{\infty} h_{jm} \gamma_j \quad ; \quad h_{jm} \text{ は } k_{in} \text{ と同じ形}$$

$$u_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu p} \lambda_{\nu} \quad ; \quad g_{\nu p} = \frac{x_{\nu}^2 \beta_p}{\beta_p^2 - x_{\nu}^2} \tan \beta_p$$

$$v_p = \sum_{\mu=1}^{\infty} d_{\mu p} \gamma_{\mu} \quad ; \quad d_{\mu p} \text{ は } g_{\nu p} \text{ と同じ形}$$

$$\omega_p = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell p} \chi_{\ell} \quad ; \quad c_{\ell p} = \frac{x_{\ell}^2}{\beta_p^2 - x_{\ell}^2} \tan \alpha_{\ell}$$

$$\phi_p = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell p} \gamma_{\ell} \quad ; \quad b_{\ell p} \text{ は } c_{\ell p} \text{ と同じ形}$$

$$\Phi_p = \sum_{i=1}^{\infty} k_{ip} \phi_i \quad ; \quad k_{ip} = \frac{x_i^2}{\beta_p^2 - x_i^2} (\beta_i \tanh \beta_p - \beta_p \tanh \beta_i)$$

$$k_{pp} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cosh^2 \beta_p} + \frac{1}{\cos^2 \beta_p} \right) + \frac{1}{\beta_p} \tanh \beta_p$$

$$\bar{\Psi}_p = \sum_{j=1}^{\infty} H_{jp} \psi_j \quad ; \quad H_{jp} \text{ は } k_{ip} \text{ と同じ形}$$

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{\infty} q_{in} \phi_i \quad ; \quad q_{in} = -\frac{x_i^2}{\beta_n^2 - x_n^2} \beta_n^2 \tan \alpha_i$$

$$V_n = \sum_{j=1}^{\infty} D_{jn} \psi_j \quad ; \quad D_{jn} = -\frac{x_j^2}{\beta_n^2 - x_n^2} - \beta_j^2 d_{jn} \tan \alpha_j$$

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{\infty} v_{in} \beta_i \quad ; \quad v_{in} = -\frac{x_i^2}{\beta_n^2 - x_n^2} - \beta_i^2 \tanh \alpha_i$$

$$T_m = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jm} \beta_j \quad ; \quad \delta_{jm} = -\frac{x_j^2}{\beta_m^2 - x_m^2} - \beta_j^2 \tanh \alpha_j$$

----- (20)

すると

$$\begin{aligned}\sum_{n,m} {}_1B_{nm} (\alpha_n^* + \lambda^* \alpha_m^*) \alpha_n \gamma_m &= \sum_{n,m} {}_1B_{nm} (\alpha_n^* + \lambda^* \alpha_m^*) \sum_{i,j} k_{ni} h_{jm} \alpha_i \gamma_j \\ &= \sum_{n,m} \alpha_n \gamma_m \sum_{i,j} {}_1B_{ij} k_{ni} h_{mj} (\alpha_i^* + \lambda^* \alpha_j^*)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\sum_{p,q} {}_2A_{pq} \beta_p \beta_q \alpha_p \nu_q &= \sum_{n,m} \alpha_n \gamma_m \sum_{\nu,\mu} {}_2A_{\nu\mu} {}_2A_{pq} \beta_\nu \beta_\mu \alpha_n \nu q \\ \sum_{p,q} {}_2B_{pq} (\beta_p^* + \lambda^* \beta_q^*) \Phi_p \Psi_q &= \sum_{p,q} \Phi_p \Psi_q \sum_{i,j} {}_2B_{ij} (\beta_i^* + \lambda^* \beta_j^*) k_{pi} h_{qj} \\ \sum_{n,m} {}_1A_{nm} \alpha_n \alpha_m \alpha_n \nu_m &= \sum_{p,q} \beta_p \beta_q \sum_{i,j} {}_1A_{ij} \alpha_i \alpha_j q_{pi} \nu_{qj} \\ \sum_{n,m} {}_1A_{nm} \alpha_n^2 \alpha_m^2 \alpha_n \gamma_m &= \sum_{n,m} \alpha_n \gamma_m \sum_{i,j} {}_1A_{ij} \alpha_i^2 \alpha_j^2 k_{ni} h_{mj} \\ \sum_{p,q} {}_2B_{pq} \beta_p \beta_q \beta_p \nu_q &= \sum_{n,m} \alpha_n \gamma_m \sum_{i,j} {}_2B_{ij} \beta_i \beta_j k_{ni} h_{mj} \\ \sum_{p,q} {}_2A_{pq} \beta_p^2 \beta_q^2 \Phi_p \Psi_q &= \sum_{p,q} \beta_p \beta_q \sum_{i,j} {}_2A_{ij} \beta_i^2 \beta_j^2 k_{pi} h_{qj} \\ \sum_{n,m} {}_1B_{nm} \alpha_n \alpha_m S_n T_m &= \sum_{p,q} \Phi_p \Psi_q \sum_{i,j} {}_1B_{ij} \alpha_i \alpha_j \nu_{pi} \nu_{qj}\end{aligned}$$

と  $\Phi_p$  と  $\sum \alpha_n \gamma_m$  正定関数) と  $\sum \beta_p \beta_q$  函数行列) とが全て直交する故 (19-1), (19-2) が成立するためには次式が満たされる必要十分条件である。

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} {}_1B_{ij} k_{ni} h_{mj} (\alpha_i^* + \lambda^* \alpha_j^*) + {}_1B_{n,m} 2\lambda^* \alpha_n^2 \alpha_m^2 \\ - E E h \lambda \sum_{\nu,\mu} {}_2A_{\nu\mu} \beta_\nu \beta_\mu \nu_{\nu} \nu_{\mu} = 0 \quad \text{--- (21-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} {}_2E_{ij} k_{pi} h_{qj} (\beta_i^* + \lambda^* \beta_j^*) + {}_2B_{pq} 2\lambda^2 \beta_p^2 \beta_q^2 \\ - E E h \lambda \sum_{i,j} {}_1A_{ij} \alpha_i \alpha_j q_{pi} \nu_{qj} = 0 \quad \text{--- (21-2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{-D(\alpha_n^* + \lambda^* \alpha_m^*) + E h L_x^2 \Omega^2\} {}_1A_{nm} - \frac{1}{2} E h L_x^2 D 2\lambda^2 \alpha_i^2 \alpha_j^2 k_{ni} h_{mj} \\ - E h \lambda \sum_{i,j} {}_2E_{ij} \beta_i \beta_j k_{ni} h_{mj} = 0 \quad \text{--- (21-3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{-D(\beta_p^* + \lambda^* \beta_q^*) + E h L_x^2 \Omega^2\} {}_2A_{pq} - \sum_{i,j} {}_2A_{ij} D 2\lambda^2 \beta_i^2 \beta_j^2 k_{pi} h_{qj} \\ - E h \lambda \sum_{i,j} {}_1B_{ij} \alpha_i \alpha_j \nu_{pi} \nu_{qj} = 0 \quad \text{(21-4)}\end{aligned}$$

以上 (21-1) ~ (21-4) まこの方程式より、全て  $\Omega=0$  の時には零でない限り、 $A$ ,  $2A$ ,  $B$ ,  $2B$  が決まるに限り示す時として  $\Omega$  に関する方程式 (行列式が零) の導き出る。上式を見るに (19,

${}_2A), ({}_2B, {}_1A)$  と全く 2 つの系列に 1 つかれることがわかる。

ところで  $A, B$  に関する行列表示を行なうと、(21) 式は一般に次のようにならめせる。

$$([a]_n^n - \bar{\Omega}^2 [I]_n^n) [A]_1^n + [b]_m^m [B]_1^m = [0]_1^n \quad \text{--- (22-1)}$$

$$[c]_n^m [A]_1^n + [d]_m^m [B]_1^m = [0]_1^m \quad \text{--- (22-2)}$$

であって  $[A], [B]$  が決まるためには

$$\begin{vmatrix} [a]_n^n & [b]_m^m \\ [c]_n^m & [d]_m^m \end{vmatrix} - \bar{\Omega}^2 \begin{vmatrix} [I]_n^n & [0]_m^n \\ [0]_n^m & [0]_m^m \end{vmatrix} = 0 \quad (22-3)$$

ところで (22-2) より

$$[B]_1^m = -[d]_m^m [c]_n^m [A]_1^n$$

(22-1) に代入して

$$([a]_n^n - [b]_m^m [d]_m^m [c]_n^m) [A]_1^n - \bar{\Omega}^2 [I]_n^n [A]_1^n = [0]_1^n$$

$[A]_1^n$  が決まるためには

$$([a]_n^n - [b]_m^m [d]_m^m [c]_n^m) - \bar{\Omega}^2 [I]_n^n = 0 \quad \text{--- (22-4)}$$

(22-3) と (22-4) とは等価である。従って  $(n+m)$  行列の行列式の固有値問題 (但し  $n$  行の  $\bar{\Omega}$  が固有値は入って来ない) が  $n$  行  $n$  列  $n$  行  $n$  列に還元される。ここに  $[I]_n^n$  は (22-2) の行列であり、又  $\bar{\Omega}^2 = E \hbar^2 \Omega^2$  である。

(22-4) の固有値を求めればよいがこれは一般に非対称行列の固有値問題となる。コンパニオン行列を作ることによって固有値  $\bar{\Omega}^2$  に関する多項式に通すことが出来る。

(Dirac の方法の注<sup>15)</sup>) ここで、多項式を解けば (これ

には *Bairstrow* の方法が最適である。)  $\Omega^2$  は容易に求められる。ここに示されたような方法は直接に固有振動数  $\Omega^2$  を求めることが可能であって b) に示した如き *try and error* の手法よりはるかに正確で且つ労力が極度に少ない。ここに示した解は単に周辺固定のみならず函数列の組合せによって通常の実用的な境界条件に対するものを作り出すことが出来る。(第 V 部 参照)

尚 ここに示す  $\Omega^2$  は a) b) に示された値と異なることに注意を要する。

計算例を表 IV に示す。

## §8 考察

*Inextensional* な振動にはライズの影響が入って来ないが *Extensional* な振動にはライズの影響が大きく入って来る。厳正な振動が両者の中間に位置するならば、運動方程式において経線方向慣性項を考慮することは大切である。この項が入るとライズの振動性状にちよぼす影響の大きいことがわかる。(計算例 a) b) 参照)。周辺固定振動についてここでは経線方向慣性項のみ取り扱ったのであるが、従ってライズの影響は非常に小さいと考えられたりであるが、計算例からかなりのライズの影響を見ることが出来る。全体として計算例を通してライズの固有振動数にちよぼす影響は大きく、曲間はライズによって急速に剛性を増すことが知られる。又ライズが有ると

表IV  $L_x/h = 100$   $\Omega^2 (= \rho h L_x \omega^2 / E h)$  の表

$a'$	0	0.10	0.40	0.60	0.80	1.00
(1.1)	0.010950	0.010982	0.011416	0.011911	0.012490	0.013105
(1.2)	0.14500	0.14508	0.15091	0.14761	0.14951	0.15128
(2.1)	0.14635	0.14666	0.14619	0.15552	0.15559	0.15565
(2.2)	0.40664	0.40691	0.44099	0.48746	0.55768	0.63585
(1.3)	0.63447	0.63461	0.63581	0.63738	0.61540	0.64608
(3.1)	0.63539	0.63551	0.63801	0.64110	0.6664	0.65012
(2.3)	1.0935	1.0903	1.1169	1.1515	1.18063	1.2652
(3.2)	1.0886	1.0953	1.1235	1.1611	1.23311	1.2824
(3.3)	2.1026	2.1047	2.1366	2.1792	2.2387	2.3158

(但し  $n = m = 3$  とする。)表IV  $\Omega^2$  の表

$L_x/h$	$a' = 0.200$	$a' = 0.600$	$a' = 1.00$
200	0.0028541	0.0034323	0.0040440
	0.036547, 0.037728	0.038615, 0.042620	0.041845, 0.046977
	0.11028	0.16122, 0.16346	0.16458, 0.169277
	0.15895, 0.15950	0.18703	0.34256
	0.27914, 0.28083	0.33584, 0.34186	0.45136, 0.46861
	0.53415	0.60253	0.74067
500	0.00052420	0.00076710	0.00102098
	0.0060727, 0.0066261	0.0074947, 0.0083814	0.0096442, 0.01061
	0.025483, 0.025724	0.027224, 0.028369	0.029863, 0.031550
	0.026076	0.10051, 0.10869	0.22493, 0.22597
	0.050597, 0.051306	0.11815	0.27833
	0.092633	0.16212	0.30311

(但し  $n = m = 3$  とする。)

振動モードにおいてかならずしも最低次型のもとの固有振動数が最低ではなく、高次型のそれの方が低い場合が存在することは注意されてよい。プレストレスの存在の影響は実用的な鉄筋コンクリート造シエルでは無視しうる程度のものであるが Young 率  $E$  が小さくなるとこの影響は次第に大きくなり 通常の釣屋根 (ザイルネット構造) になるとこの影響は非常に大きくなる。

双曲型曲面では曲面の剛性が設計上重要な問題であるが、その剛性を与えるためにはライズを与えることが非常に有効な手段であることが示された。P.S. を与えることは決して H 効ではない。ここに示された固有振動数を一つのインデックスとして双曲型曲面の剛性面からの設計の基準とされるには風の息等、風に対する研究が未だ不足というより全くなされていない状態で今の段階では不可能である。がやがてはい上の研究が役立つ時がくるものと信ずる次第である。

## 第Ⅱ部 曲面板の円孔問題に関する研究

### 第一章 円孔を有する球殻

#### 序

球殻はドームとして建築物に古くから用いられて来た。ところでこれらのドームは一般には頂点で閉じてなく、採光、換気のため天窓が設けられるのが普通であった。また近年になり、球殻が圧力容器等として広く使用されるようになると各種のダクトが取り付けられるようになり、あるいは柱で支持する等、円孔を有する球殻として孔まわりの局部応力が問題となる場合が多くなった。

薄膜理論によって殻の設計を行なった初期の頃ではドームにおける天窓に対して、薄膜力の不連続量を円孔縁にリングを配することによって処理していた<sup>(1)</sup>。しかし圧力容器のごとくある程度厳密さを要求される殻では曲げ理論にもとづく解析が必要とされる。

小さい円孔により球殻に応力攪乱がある場合には、その範囲はその周辺の狭い範囲に限られるので、解析にあたって偏平球殻の理論を用いることが出来る。偏平殻の力の釣合式における斉次解は第Ⅰ部、第一章 §8 の偏平殻の項において  $\Omega^2 = 0$  とした場合のものである。

## §1 解の表現

第I部第一章§8の磁平球殻の項において  $\Omega^2 = 0$  とする  
と、解の特性値は次のようになる。

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (4+k)\lambda + 2k = 0$$

$$\therefore (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+k) = 0$$

$k = 12(1-\nu^2)a^2/h^2 \gg 1$  である故、

$$\lambda = -2, \pm \sqrt{k}i \quad \text{----- (1)}$$

従って P. の ii), iii) に従って解を書き下すと  $\sqrt{2}\varphi = x^{(1)}$

$\sqrt{2}\varphi = x^{(2)}$  とおいて、前者より応力函数  $\varphi$  は

$$\varphi = \{A J_n(x^{(1)}) + B Y_n(x^{(1)})\} \cos n\theta$$

後者より

$$\varphi = \{C \ker_n x^{(2)} + D \operatorname{kei}_n x^{(2)} + E \operatorname{ber}_n x^{(2)} + F \operatorname{bei}_n x^{(2)}\} \cos n\theta$$

となる。ところで局部的な附近応力に関する項のみ必要であるから境界より単調に増大していく諸量を見捨てる。

従って  $J_n(x^{(1)})$ ,  $\operatorname{ber}_n x^{(2)}$ ,  $\operatorname{bei}_n x^{(2)}$  を無視して整理すると

$$\varphi = \{A Y_n(x^{(1)}) + B \ker_n x^{(2)} + C \operatorname{kei}_n x^{(2)}\} \cos n\theta$$

$$w = \{c_1 A Y_n(x^{(1)}) + c_2 B \ker_n x^{(2)} + c_3 C \operatorname{kei}_n x^{(2)}\} \cos n\theta$$

ところで  $Y_n(x^{(1)})$  は  $x$  の小さい範囲(零の近傍)で  $\log x$  に等しい、従ってこれは  $w$  としては採用することは不可である。又、近似的に

$$c_2 = \frac{1}{Eka} \sqrt{k}i, \quad c_3 = -\frac{1}{Eka} \sqrt{k}i$$

である。従って求める解は次のようにならねせる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \{A \log x^{(1)} + B \ker_n x^{(2)} + C \operatorname{kei}_n x^{(2)}\} \cos n\theta \\ w &= \{-C \operatorname{ber}_n x^{(2)} + B \operatorname{bei}_n x^{(2)}\} \frac{1}{Eka} \sqrt{k} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (2)}$$



こゝろち  $A$  の未知数を含む項は境界附加応力の項ではなく、境界に加わる力による殻全体の薄膜応力に相当する項である。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \left\{ \frac{\sqrt{2} A}{\chi^{(1)}} + B \left( \frac{n}{\varphi} \ker_n \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} + \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + C \left( \frac{n}{\varphi} \ker_n \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right) \right\} \cos n\theta \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} &= \left[ -\frac{2}{\chi^{(1)2}} A + B \left\{ \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ker_n \chi^{(2)} + \sqrt{k} \ker_n \chi^{(2)} + \frac{1}{\varphi} (\alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)}) \right\} + C \left\{ \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ker_n \chi^{(2)} - \sqrt{k} \ker_n \chi^{(2)} + \frac{1}{\varphi} (\alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)}) \right\} \right] \cos n\theta \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \left\{ B \left( \frac{n}{\varphi} \ker_n \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right) + C \left( -\frac{n}{\varphi} \ker_n \chi^{(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} - \alpha \ker_{n+1} \chi^{(2)} \right) \right\} \cdot \frac{1}{E h a} \sqrt{k} \cos n\theta \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= \left[ B \left\{ \frac{n(n-1)}{\varphi^2} \ker_n \chi^{(2)} - \sqrt{k} \ker_n \chi^{(2)} + \frac{1}{\varphi} (\ker_{n+1} \chi^{(2)} + \ker_{n+1} \chi^{(2)}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + C \left\{ \frac{-n(n-1)}{\varphi^2} \ker_n \chi^{(2)} - \sqrt{k} \ker_n \chi^{(2)} - \frac{1}{\varphi} (\ker_{n+1} \chi^{(2)} - \ker_{n+1} \chi^{(2)}) \right\} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{E h a} \sqrt{k} \cos n\theta\end{aligned}$$

(3)

ここに  $\alpha = \pm \sqrt{k}, \sqrt{2}$

これらを用いて断面力、変位は求められる。

円孔境界において軸対称荷重が与えられる場合、及び逆対称荷重が与えられる場合について(上述の  $n=0, 1$  の場合) 上記と同様な解を導き、数値計算を行なった研究が報告されている。<sup>[2]</sup>

一般に特異な境界でない限り球殻では数値計算は極めて容易であり、又文献[2]によっても円孔の影響をみる事が出来る、でこゝろではこれ以上の研究を行なわない。

## 第二章 円孔を有する円筒殻

### 序

ある構造物や容器の支持体として使用される円筒殻や煙突、航空機、潜水艦等には側面に円孔を有する場合が多い。この円孔のためその周辺では著るしい応力の集中攪乱が生じる。また近年とみに多くなったパイプ構造の仕口は円形境界となり、円筒殻の側面に円孔のある場合と全く同じ問題となる。この円孔を厳正に取り扱った研究はまだ見ないのである。無限壁体が一方向に面内圧縮力(あるいは引張力)をうける場合、自由境界の円孔を有するとその円孔縁では外力の3倍の応力集中を生じるが、円筒殻にあつてはこれ以上に応力集中のあることは容易に推測され、従つて円孔の影響もその減衰は早いと思われる。本論文はこの円孔の任意の境界条件下における周辺の応力攪乱を論じたもので厳正な理論的取り扱いをおこなっている。

1958年、D. Withum によつてなされた円孔を有する円筒殻を扱った場合の、即ち円孔まわりの影響が円孔を中心とした座標軸に対して逆対称な場合の円孔周辺の応力解析がこの方面での筆者の知る唯一の研究である。より困難で一般的な解即ち座標軸に対して対称な場合は見当らない。彼の解は数学的には極めて巧妙に求められているのであるが、パラメーターの導入と、解の未定積分常数の級数展開における煩雑さのため、実用上使用は全く

困難であり、その計算例に見る如くはなほだしい近似を  
 ほどなさねばならない。これは解の巧妙な手段で得た部  
 分を全く無視するものであり、苦勞も実らないことにな  
 る。ここでは座標系として、測地的極座標をとり、極を  
 孔の中心にとり、一般的な境界条件下の孔に対する厳正  
 解を求める。これは実用上は近似解として用いられるが  
 (級数の数個を用いるので) 精度の良いものである。

本論文ではまず円孔の境界条件が軸方向および円弧方  
 向に対する対称、逆対称、あるいはその混合された状態  
 のときの応力の攪乱量を示す解を D. Withum と同様の手  
 法で求め(第一法)、さらに簡潔な表示の解をイテラチオン  
 の手法で求めた(第二法)。後者は全く厳正であって且つ実  
 用的なものであり、これを用いて円筒殻の一樣面内力、  
 撓れ、面内集中力、あるいはダクトが取り付けられる時  
 等々の円孔まわりの応力状態が解析可能となる。

次にこの解を用いて、円筒殻が軸方向に一樣圧縮され  
 る場合の円孔まわりの応力集中をしらべる。さらにアク  
 リライトを用いての実験を行なって両者の比較検討を行  
 なう。得られた結果には各部寸法が具体的には入ってい  
 ないのである。比率の形状の全円筒殻に適用できる。

なお本論文は 1961 年に発表された。

## §1 基礎方程式

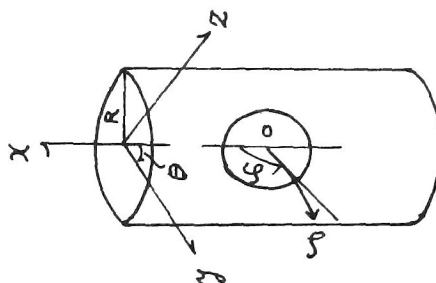
基礎方程式（曲げ理論式）を円孔の周辺に關して求める。  
面の法線方向変位  $w$  と応力函数  $\phi$  を用いて、断面力の釣  
合と、変形の適合条件から導かれた近似曲げ理論式<sup>[2]</sup>  
を基礎式として用いる。

$$(g^{11}\nabla_1\nabla_1 + 2g^{12}\nabla_1\nabla_2 + g^{22}\nabla_2\nabla_2)^2\psi + i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{+g}(H_{11}\nabla_2\nabla_2 - 2H_{12}\nabla_1\nabla_2 + H_{22}\nabla_1\nabla_1)\psi = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \psi = w + iA\phi, \quad A = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E\lambda^2}, \quad i^2 + 1 = 0$$

今、円筒側面上に座標原点をとり、測地的極座標をとると、座標軸は側面を走った螺旋状にある。動径  $\rho$ 、回転角  $\varphi$  を変数とする。

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= R \cos\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi\right) \\ z &= R \sin\left(\frac{\rho}{R} \sin \varphi\right) \end{aligned} \right\}$$



以後、 $\rho$   $\varphi$  はそれぞれ 1, 2 に対応せしめる。

これより基本量を求めると

次のようになる

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \rho^2 \\ g &= \rho^2, \quad g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{\rho^2} \\ H_{11} &= \frac{1}{R} \sin^2 \varphi, \quad H_{12} = \frac{\rho}{2R} \sin 2\varphi, \quad H_{22} = \frac{\rho^2}{R} \cos^2 \varphi \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\rho}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla_1 \nabla_1 f &= f_{,1,1} \\ \nabla_1 \nabla_2 f &= f_{,2,1} - \frac{1}{f} f_{,2} \\ \nabla_2 \nabla_2 f &= f_{,2,2} + f f_{,1} \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (4)$$

ここに  $f_{,i}$  は  $i$  による微分を意味していい。

応力テンソルは次のように表さる。  $N^{ij} = \epsilon^{ip} \epsilon^{jq} \nabla_p \nabla_q \phi$  より

$$\left. \begin{aligned} N^{11} &= \frac{1}{f} \nabla_2 \nabla_2 \phi = \frac{1}{f^2} (f_{,2,2} + f f_{,1}) \\ N^{12} &= -\frac{1}{f} \nabla_1 \nabla_2 \phi = -\frac{1}{f^2} (f_{,2,1} - \frac{1}{f} f_{,2}) \\ N^{22} &= \frac{1}{f} \nabla_1 \nabla_1 \phi = \frac{1}{f^2} (f_{,1,1}) \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{,2}^1 &= -K \cdot f \left[ \omega_{,1,1} + \frac{\nu}{f^2} (\omega_{,2,2} + f \omega_{,1}) \right] \\ M_{,1}^2 &= K \cdot f \left[ \nu \cdot \frac{1}{f^2} \omega_{,1,1} + \frac{1}{f^4} (\omega_{,2,2} + f \omega_{,1}) \right] \\ M_{,1}^1 &= -M_{,2}^2 = K f (1-\nu) \cdot \frac{1}{f^2} (\omega_{,2,1} - \frac{1}{f} \omega_{,2}) \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (6)$$

$$K = \frac{E k^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} Q^1 &= \nabla_1 M_{,2}^1 + \nabla_2 M_{,1}^2 = (M_{,2}^1)_{,1} + (M_{,1}^2)_{,2} + f M_{,1}^2 \\ \sqrt{g} Q^2 &= -\nabla_1 M_{,1}^1 - \nabla_2 M_{,2}^1 = -(M_{,1}^1)_{,1} - (M_{,2}^1)_{,2} + \frac{2}{f} M_{,2}^1 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (7)$$

実断面力と応力テンソルとの関係は次のように表さる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}^{11} &= N^{11}, & \dot{N}^{12} &= f N^{12}, & \dot{N}^{22} &= f^2 N^{22} \\ \dot{M}_{,1}^1 &= M_{,1}^1, & \dot{M}_{,2}^2 &= M_{,2}^2, & \dot{M}_{,2}^1 &= \frac{1}{f} M_{,2}^1, & \dot{M}_{,1}^2 &= f M_{,1}^2 \\ \dot{Q}^1 &= Q^1, & \dot{Q}^2 &= f Q^2 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (8)$$

諸量を (1) 式に代入し、2 次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi + \lambda \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{kR} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi \right. \\ & \left. + \cos 2\varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi + \sin 2\varphi \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi \right] = 0 \text{-----} \quad (9) \end{aligned}$$

(9) 式が測地的極座標 (螺線座標) の場合の曲が理論式である。これを解くことにより (5), (6) より、断面力、断面モーメントを円筒殻について求めることが出来る。

## §2 基礎方程式の解

(9) 式の座標系は円孔の中心にとる。今円孔は円筒の中心に存在し、円孔周りの応力状態が  $\varphi$  の値  $0, \frac{\pi}{2}$  に対して対称に与えられる場合について取扱ってみる。

このような状態は実用上最も多く見られるものである。

(9) 式は  $\cos 2\varphi, \sin 2\varphi$  なる係数を含んでおり、従って、このままでは容易に解を求めることは出来ない。 $\psi$  を Fourier 展開する。

$$\psi = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n \sin 2n\varphi \quad \text{----- (10)}$$

(10) を (9) に代入し、 $\sin 2n\varphi, \cos 2n\varphi$  の各々に係数 2 を整理すると、これらが  $\varphi$  のすべての値に対して成立しなけければならないことより、

$$\begin{aligned} \Delta^* \Delta^* \psi_n + i \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{xR} \left[ \Delta^* \psi_n + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{4n+3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{4n(n+1)}{\rho^2} \right) \psi_{n+1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{4n-3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{4n(n-1)}{\rho^2} \right) \psi_{n-1} \right] = 0 \quad \text{----- (11)} \\ [n=0, 1, 2, \dots] \end{aligned}$$

但し  $\psi_{-1} = 0, \quad \Delta^* = \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{4n^2}{\rho^2} \right)$

ここで変数を次のように変換する。

$$\xi = k\rho, \quad \zeta = \sqrt{i} \xi = k\sqrt{i} \rho \quad \text{----- (12-a, b)}$$

$$k^2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} / tR$$

(12-b) を (11) に代入し、2 次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta+1)\psi_n = & -\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{4n+3}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{4n(n+1)}{\zeta^2} \right] \psi_{n+1} \\ & -\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{4n-3}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{4n(n-1)}{\zeta^2} \right] \psi_{n-1} \quad \text{----- (13)} \end{aligned}$$

$$= = = \quad \Delta = \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \frac{4n^2}{\zeta^2} \right)$$

$\psi_n$  についても全く同様の関係式が成立する。但し、 $\psi_0 \equiv 0$  従って以下では  $\psi_n$  についてのみ論ずることにする。

(13) 式は  $\psi_n$  に関し、漸化関係にある微分方程式で無限連立常微分方程式となる。従って、 $\psi_n$  を知るには  $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  の値が、 $\psi_{n+1}$  を知るには  $\psi_n$  の値が必要となり、このままでは解くことができない。ゆえに (13) 式において右辺を零と置いて得られた  $\psi_n$  のみに関する解 ( $\psi_n$  の斉次解) を求め、 $\psi_{n+1}$ ,  $\psi_{n-1}$  による影響を  $\psi_n$  の特解として附加する。(13) の斉次解を求めると、 $\Delta(\Delta+1)\psi_n = 0$  の解ゆえ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= {}_1A_0'' + {}_2A_0'' \log \zeta + {}_1B_0'' J_0(\zeta) + {}_2B_0'' H_0^{(1)}(\zeta) \\ \psi_n &= {}_1A_n'' \zeta^{2n} + {}_2A_n'' \frac{1}{\zeta^{2n}} + {}_1B_n'' J_{2n}(\zeta) + {}_2B_n'' H_{2n}^{(1)}(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (14)}$$

ところで本論文は円孔周辺における応力擾乱を取り扱っており、従って附加曲線の影響は境界を十分に離れると消滅しはけいしはけいから今対象とする解もその性状を示すものでなければならぬ。ところで (14) は薄膜

状態的解 (全域にわたる解) が含まれている故  $z = z''$  はそれを分離し除去する。(4)の減衰性についてみる。

$$J_{2n}(z) \doteq \pm \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \left[ e^{\frac{z}{\sqrt{z}}} \left\{ e^{-(\frac{z}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\pi)i} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot e^{(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{\sqrt{z}})i} \right\} \right. \\ \left. + (e^{\frac{3}{2}\pi i} + \cos \frac{\pi}{2}) \cdot \cos z - \sin z \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow \infty} J_{2n}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} J_{2n}(z\sqrt{z}) = \pm \infty \pm i\infty$$

即ち発散する。又一種 Hankel 函数  $H_{2n}^{(1)}(z)$  は適当な操作を行なって同様に論ずるのであるが、以後の使用を考へて次のような場合について減衰性を論ずる。

$$z^p H_{2n-p}^{(1)}(z) \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

$$z^p H_{2n-p}^{(1)}(z) \doteq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\pi z}} z^p e^{-\frac{z}{\sqrt{z}}} e^{(\frac{1}{2}p\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\pi - \frac{\pi}{2})i}$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow \infty} z^p H_{2n-p}^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z\sqrt{z})^p H_{2n-p}^{(1)}(z\sqrt{z}) = 0$$

即ち減衰収斂する。又、 $1/z^n$  は減衰  $z^n$  は発散する。尚、 $n=0$  の場合の  $\log z$  に関し、 $z$  の多項式が収斂するので応力に関しては曲げ解として取り扱う。以上より附加曲げの項として採用出来るのは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= A_0 \log z + B_0 H_0^{(1)}(z) \\ \psi_n &= A_n \frac{1}{z^n} + B_n H_{-n}^{(1)}(z) \end{aligned} \right\} \text{----- (15)}$$

但し、 $\psi_0$  において  $\log z$  から得られる解のうち応力函数中のみ  $z = z''$  で採用する。

さて、(1)式の特解部は既述の如く  $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  の影響のためこのままでは求まらない。適当な級数展開を行な



って解くことが可能である。

(i) 第一法

振った場合に対する D. Withum の方法と同様の手法による。

今  $0 \equiv z \equiv 1$  なる  $z$  を右辺にかけることにより、 $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  の影響を  $\psi_n$  から少なくするという近似を行なう。

$\psi_R$ , ( $R=0, 1, 2, \dots$ ) を  $z$  のべき級数に展開すると、

$$\psi_R = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \psi_R^{(\nu)} \quad \text{-----} \quad (16)$$

(13) 式は

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta+1) \psi_n^{(\nu)} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{4n+3}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{4n(n+1)}{\zeta^2} \right) \psi_{n+1}^{(\nu-1)} \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{4n-3}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{4n(n-1)}{\zeta^2} \right) \psi_{n-1}^{(\nu-1)} \quad \text{-----} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\text{但し } \psi_n^{(-1)} \equiv 0 \quad \psi_{-1}^{(\nu)} \equiv 0$$

(15) を考慮して、(17) の解を次のように置く

$$\psi_n^{(\nu)} = \sum_{p=1}^n A_{n,p}^{\nu} \frac{1}{\zeta^{2p}} + \sum_{p=0}^n B_{n,\nu}^p \zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta) \quad \text{-----} \quad (18)$$

$A_{n,\nu}^p$ ,  $B_{n,\nu}^p$  を未知常数とし、他の係数  $A_{n,\nu}^p$ ,  $B_{n,\nu}^p$  を求める。 (18) を (17) に代入して、 $A_{n,\nu}^p$  に関する  $z$  は次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} A_{n,\nu}^{p-1} \{ 4p(p-1) \langle (-p-1)^2 - (1+2n^2) \rangle + (4n)^2 (n^2-1) \} + A_{n,\nu}^p (4p^2 - 4n^2) \\ = -\frac{1}{2} \left[ \{ 2p(2p+1) - 2(4n+3)p + 4n(n+1) \} A_{n+1,\nu-1}^p \right. \\ \left. + \{ 2p(2p+1) - 2p(4n-3) + 4n(n-1) \} A_{n-1,\nu-1}^p \right] \quad \text{-----} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\text{但し } A_{n-1,\nu-1}^p \equiv 0, \quad A_{n,\nu}^1 \equiv 0, \quad A_{n-1}^0 \equiv 0, \quad A_{n,0}^p \equiv 0 \quad (p \neq n),$$

$A_{n,\nu}^p$  : 未知常数

(18) の 2 項の係数を求める。

$$\Delta \psi_n = \Omega_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{----- (a)}$$

なる  $\Omega_n$  を導入すると  $\psi_n$  と全く同様に、 $\Delta \Omega_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \Omega_n^{(\nu)}$  となり、(18) と同様に次のようにおける。

$$\Omega_n^{(\nu)} = \sum_{p=0}^{\nu} S_{n,\nu}^p \zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta) \quad \text{----- (b)}$$

これを (17) 式に入れて、 $S_{n,\nu}^p$  と  $B_{n,\nu}^p$  との間の関係式を求めよう。  $H_{2n+1-p}$  の項の係数を等しいとおいて、

$$S_{n,\nu}^p = \frac{1}{4p} \{ B_{n-1,\nu-1}^{p-1} - S_{n+1,\nu-1}^{p-1} \} - \frac{1}{2} S_{n+1,\nu-1}^p \quad \text{----- (c)}$$

但し、 $S_{n,\nu-1}^0 \equiv 0$ ,  $[p=1, 2, \dots, \nu]$

と置く。 (a), (b) より

$$S_{n,\nu}^p = -B_{n,\nu}^p - (p+1) B_{n+1,\nu}^{p+1}, \quad S_{n,\nu}^{\nu} = -B_{n,\nu}^{\nu} \quad \text{----- (d)}$$

(c), (d) より、 $S_{n,\nu}^p$  を消去するための長い計算の結果、次のように関係式が得られる。

$$\begin{aligned} 2(p+1) B_{n,\nu}^{p+1} = & - \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{(p-j)!}{2^{j-p} p!} \left\{ \frac{1}{4(p-j)!} (B_{n-1,\nu-1}^{p-j-1} + B_{n+1,\nu-1}^{p-j} + (p-j+1) B_{n+1,\nu-1}^{p-j+1}) \right. \\ & + \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{p+j-\nu} \varepsilon^{\nu-j-p} \frac{(\nu-j)!}{p!} \left\{ \frac{1}{4(\nu-j)} (B_{n-1,\nu-1}^{\nu-j-1} + B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j-1}) \right. \\ & \left. \left. + B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j} + (\nu-j+1) B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j+1} \right\} \right\}, \quad (p=1, 2, \dots, \nu) \\ 2B_{n,\nu}^1 = & \sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^{j-\nu} \varepsilon^{\nu-j} (\nu-j)! \left\{ \frac{1}{4(\nu-j)} (B_{n-1,\nu-1}^{\nu-j-1} + B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j-1}) \right. \\ & \left. + B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j} + (\nu-j+1) B_{n+1,\nu-1}^{\nu-j+1} \right\} \quad \text{----- (20)} \end{aligned}$$

但し、 $B_{n,\nu}^0$  : 未知常数  $B_{n-1,\nu-1}^{\nu} \equiv 0$ ,  $B_{n,\nu}^{-1} \equiv 0$

かくて (18) の各係数は求まった。(18) を無限個組み合せる

ことによつて  $\psi_n$  は求まる。従つて以上で (13) 式は解かれた事になる。だが、この解の実用化にあつては、その選び方によつて未知常数は無限に多くなり、今日行われるような計算ではこの解を容易には使用出来ず、D. Withum も例題を取り扱つてゐる如く、 $\varepsilon=0$  としたければならなくある。これは全く  $\psi_n$  に対する  $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  の影響を無視するものであつて、解は (15) と一致し、以上の煩雑な計算は不要になる。又斉次解のみによる数値計算は誤差が大きい。(計算例参照) 従つて、この解は巧妙に導くことが出来たが実用的ではない。

### (ii) 巾 = 法

この方法は  $\psi_n$  に対して  $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  を考慮し、特解部を逐次求めていくものである。まず、両隣りの  $\psi$  の斉次解のみが特解部に影響を与えたとし、 $\psi$  の  $n$ -次の特解を求め、次にこれら  $n$ -次特解のみによる影響から  $n$ -次の特解を求めるといふ操作をくりかえし行う。無限回行えば、これら特解の和は正解の特解と一致する。

(15) を考慮し (13) の解を次のようにおく、

$$\psi_n = \sum_{\varepsilon=1}^n A_n^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{2\varepsilon}} + \sum_{p=0}^{\infty} B_n^p \zeta^p H_{2n-p}^{(1)} + i D_0 \zeta_0 n \log \frac{\zeta}{\sqrt{i}} \quad \text{--- (21)}$$

$$\zeta_0 = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

ここに、 $A_n^{\varepsilon}$ ,  $B_n^p$  は各々  $B_n^p$ ,  $A_n^{\varepsilon}$  に対して影響を与へるものと考へられるから、別個にとり扱へ得る。 $A_n^{\varepsilon}$  ( $\varepsilon=1, \dots, n-1$ ),  $B_n^p$  ( $p=1, \dots, \infty$ ) が  $A_n^{\varepsilon}$ ,  $B_n^p$  の函数として決められれば (21) は

(13)の解として採用出来る。(21)のキ-項  $A_n^p$  を決める。

(20)を(13)に代入し、左右辺の同じ中の項を等しいとおくと、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & A_n^{p-1} \{ 4p(p-1) \langle (2p-1)^2 - (1+8n^2) \rangle + (4n)^2(n^2-1) \} + A_n^p (4p^2 - 4n^2) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \{ 2p(2p+1) - 2p(4n+3) + 4n(n+1) \} A_{n+1}^p \right. \\ &\quad \left. + \{ 2p(2p+1) + (4n-3) \cdot 2p + 4n(n-1) \} A_{n-1}^p \right] \quad (22) \end{aligned}$$

==で特に注意すべき事がある。 $\psi_0$ の  $A_0^0 \log \zeta$  の影響が(22)の関係に入っていない。= $\gamma$ = $\gamma$ について少し考察を行なう。

(13)において、 $n=0$ の場合(21)を代入すると、(13)式の右辺の  $\psi$  は次式を満足せねばならない。

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{3}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \right) \psi_1 = 0$$

故に  $\psi_1 = K_1 + K_2 \frac{1}{\zeta^2}$ , ( $K_1, K_2$ : 常数)

ところで  $\psi_1 = K_1$  なる解は曲げ解として不適当である。

又、 $\psi_1 = \frac{K_2}{\zeta^2}$  の解について(2)の関係式は既に考慮されている。 $\psi_2 = K_3$  と考えると(13)式は  $n=1$  に対して  $0 = \frac{A_0^0}{\zeta^2} - \frac{4K_3}{\zeta^2}$  故に  $A_0^0 = 4K_3$  なる関係が満足される。(13)式は

$n=1$  に対して満足される。だが  $\psi_2 = K_3$  は曲げ解として採用することが出来ない。従って  $K_3$  を今取り上げた

いとすると  $A_0^0$  の影響は曲げ解としては  $\psi_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) にはあらわれない。結論として  $A_0^0$  の影響は考慮しなくても可なる事、(13)式、係数項の関係は充分であることが

云える。尚、これらの事は適合条件からも出ることで

あるが同じ様な事がある故略す。

$B_n^0$  を決める。即ち  $\psi_n$  を未定常数  $B_n^0$  によって表示する。今  $\psi_{n+1}$ ,  $\psi_{n-1}$  の各次解のみが  $\psi_n$  に対しての影響を与えるとする。  $\psi_n$  に対しては、

$$\psi_{n,1} = B_n^0 H_{2n}^{(1)}(\zeta) + B_{n,a}' \zeta \cdot H_{2n-1}^{(1)}(\zeta)$$

とおい (1) 式より

$$B_{n,a}' = -\frac{1}{4} \{ B_{n+1}^0 + B_{n-1}^0 \} \quad \text{----- (c)}$$

となる。同様の操作を繰り返して特解部  $B_{n,a}^{(1)}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) を求める。次にこの特解部  $B_{n,a}^{(1)}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) の  $\psi_n$  に対する影響を求める。  $\psi_{n+1,a}'$ ,  $\psi_{n-1,a}'$  の  $\psi_n$  に対する影響は  $\psi_{n,2} = B_{n,a}^2 \zeta^2 H_{2n-2}^{(1)}(\zeta) + B_{n,b}' \zeta H_{2n-1}^{(1)}(\zeta)$  とおい (1) 式に代入し、左右両辺の Hankel 函数の係数を等しいと仮定することにより、

$$8 \cdot B_{n,a}^2 + 2 \cdot B_{n,b}' = -\frac{1}{4} (4 B_{n+1,a}'), \quad 4 B_{n,a}^2 = -\frac{1}{2} \{ B_{n+1,a}' + B_{n-1,a}' \} \quad \text{----- (d)}$$

或いは (d) を代入して

$$B_{n,a}^2 = \frac{1}{32} \{ B_{n-2}^0 + 2 B_n^0 + B_{n+2}^0 \}, \quad B_{n,b}' = \frac{1}{8} (B_{n+2}^0 - B_{n-2}^0) \quad (4')$$

となる。以下同様の操作をくりかえして、一般に  $B_{n,a}^{p-1}$ ,  $B_{n,b}^{p-2}$ ,  $B_{n,c}^{p-3}$ ,  $\dots$ ,  $B_{n,y}'$  の  $\psi_n$  に対する影響は  $\psi_{n-1}$ ,  $\psi_{n+1}$  の  $\psi_n$  に対する影響について見ると次のようになる。

$$\psi_{n,p} = B_{n,a}^p \zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta) + B_{n,b}^{p-1} \zeta^{p-1} H_{2n-p-1}^{(1)}(\zeta) + \dots + B_{n,y}^1 \zeta H_{2n-1}^{(1)}(\zeta)$$

とある (13) 式に代へて、両辺加算して、 $n = k$  より、

$$\begin{aligned}
 2P \cdot B_{n,a}^P &= -\frac{1}{2} (B_{n+1,a}^{P-1} + B_{n-1,a}^{P-1}) \\
 4P(P-1) B_{n,b}^P + 2(P-1) B_{n,b}^{P-1} &= -\frac{1}{2} \{ 4(P-1) B_{n+1,a}^{P-1} + B_{n+1,b}^{P-2} + B_{n-1,b}^{P-2} \} \\
 4(P-1)(P-2) B_{n,b}^{P-1} + 2(P-2) B_{n,c}^{P-2} \\
 &= -\frac{1}{2} \{ 4(P-1)(P-2) B_{n+1,a}^{P-1} + 4(P-2) B_{n+1,b}^{P-2} + B_{n+1,c}^{P-3} + B_{n-1,c}^{P-3} \} \\
 4(P-2)(P-3) B_{n,c}^{P-2} + 2(P-3) B_{n,d}^{P-3} \\
 &= -\frac{1}{2} \{ 4(P-2)(P-3) B_{n+1,b}^{P-2} + 4(P-3) B_{n+1,c}^{P-3} + B_{n+1,d}^{P-4} + B_{n-1,d}^{P-4} \}
 \end{aligned}$$

$$2B_{n,z}^1 = -\frac{1}{2} (8B_{n+1,x}^2 + 4B_{n+1,y}^1) - 8B_{n,y}^1$$

----- (18)

或いは  $k = k$  において、

$$\begin{aligned}
 B_{n,a}^P &= -\frac{1}{4P} (B_{n+1,a}^{P-1} + B_{n-1,a}^{P-1}) \\
 B_{n,b}^{P-1} &= -\frac{1}{4(P-1)} \{ 2(P-1) (B_{n+1,a}^{P-1} - B_{n-1,a}^{P-1}) + B_{n+1,b}^{P-2} + B_{n-1,b}^{P-2} \} \\
 B_{n,c}^{P-2} &= -\frac{1}{4(P-2)} \{ 4(P-1)(P-2) B_{n-1,a}^{P-1} + 2(P-2) (B_{n+1,b}^{P-2} - B_{n-1,b}^{P-2}) + B_{n+1,c}^{P-3} + B_{n-1,c}^{P-3} \} \\
 B_{n,d}^{P-3} &= -\frac{1}{4(P-3)} \{ -8(P-1)(P-2)(P-3) B_{n-1,a}^{P-1} + 4(P-2)(P-3) B_{n-1,b}^{P-2} \\
 &\quad + 2(P-3) (B_{n+1,c}^{P-3} - B_{n-1,c}^{P-3}) + B_{n+1,d}^{P-4} + B_{n-1,d}^{P-4} \}
 \end{aligned}$$

$$B_{n,z}^1 = -\frac{1}{4} (8B_{n+1,x}^2 + 4B_{n+1,y}^1) - 8B_{n,y}^1$$

----- (23)

但し、 $P=1, 2, \dots$ ,  $B_{k,b,c,d,\dots}^0 \equiv 0$ ,  $B_{k,a}^0 = B_k^0$

(21) であるゆえに、 $B_n^P$  は  $P$  次係数  $B_n^P$  は従って  $P$  次の

とあるゆえに、

$$B_n^P = B_{n,a}^P + B_{n,b}^P + B_{n,c}^P + \dots + B_{n,z}^P \quad \text{----- (24)}$$

即ち (23) において、 $\nabla = \nabla^P$ ,  $\nabla = \nabla^{P+1}$ ,  $\nabla \equiv \nabla^P$

129

$p \Rightarrow p+2, \dots$  と 1 を加えたものが  $B_n^p$  である。特に  $B_{-n, a, b, \dots}^p$   
 $(k=1, 2, \dots) = 0$  である。かくて (13) の解を (14) であらわす事  
 が出来た。未定常数は  $A_n^p, B_n^p$  の二個であって、他の係数  
 $A_n^p, B_n^p$  は (22), (23) を用いて、 $A_n^p, B_n^p$  の函数としてあらわす  
 ことが可能である。  $p$  を十分に大きくとれば精度は良く  
 $p \rightarrow \infty$  で厳正解となる。従って、  $p$  を有限値とする時止  
 似解となる。

### §3 断面力の表示

§2 で求められた  $\psi$  より断面力を求める。前節における  
 $\psi$  を新たに  $\psi = \psi/A = w/A + i\phi$  とおき、  $A$  の値を未定常  
 数に含める。  $A_n^p, B_n^p$  は一般に複素数であるから、次のよ  
 うに置く。

$$\left. \begin{aligned} A_n^p &= C_n^p + i D_n^p, & B_n^p &= E_n^p + i F_n^p \\ A_0^p &= i D_0^p \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (25)}$$

ことに  $A_0^p = i D_0^p$  とは既述の如く  $\log r$  はその導函数は減  
 衰函数であるが  $\log r$  そのものは発散するため、  $\phi$  では  
 考慮されるが、  $w$  の項では曲げ解として採用されないた  
 めである。又、次の記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} [\zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta)] &= X_{n,p}(\zeta) \\ \operatorname{Im} [\zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta)] &= Y_{n,p}(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (26)}$$

但し、  $\zeta = \sqrt{i} \zeta$

(25), (26) を (21) に用いて次を得る。

$$\frac{W_n}{A} = \sum_{\delta=1}^n \left( C_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{\delta+2}}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (E_n^p X_{n,p}(z) - F_n^p Y_{n,p}(z))$$

$$\phi_n = \sum_{\delta=1}^n \left( -C_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{\delta+2}}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (E_n^p Y_{n,p}(z) + F_n^p X_{n,p}(z)) + D_0^0 \delta_{0,n} \log z$$

$$= \text{に. } A = \sqrt{12(1-\nu^2)} \cdot Et^2, \quad \delta_{0,n} \text{ は } n \text{ の } \delta \text{ 成分} - \text{の } \delta \text{ 成分}$$

$$N_{F,n} = \sum \left[ (2\delta+4n^2) \left( C_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} - D_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} + \delta_{0,n} D_n^0 \frac{1}{z} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{(2n-4n^2)}{z^2} \cdot Y_{n,p}(z) - X_{n,p-1}(z) \right\} E_n^p \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{(2n-4n^2)}{z^2} \cdot X_{n,p}(z) + Y_{n,p-1}(z) \right\} F_n^p \right] \cos 2n\varphi$$

$$N_{F\varphi,n} = \sum \left[ 2n(1+2\delta) \left( C_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} - D_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} + 2n \left\{ (2n-1) \frac{1}{z^2} Y_{n,p}(z) \right. \right.$$

$$\left. - X_{n,p-1}(z) \right\} E_n^p + 2n \left\{ (2n-1) \frac{1}{z^2} X_{n,p}(z) + Y_{n,p-1}(z) \right\} F_n^p \right] \sin 2n\varphi$$

$$N_{\varphi,n} = \sum \left[ 2\delta(2\delta+1) \left( -C_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} - \frac{\delta_{0,n} D_n^0}{z^2} \right.$$

$$\left. + \left\{ (1-2p) X_{n,p-1}(z) - X_{n,p}(z) + \frac{2n(2n-1)}{z^2} Y_{n,p}(z) \right\} E_n^p \right.$$

$$\left. + \left\{ (2p-1) Y_{n,p-1}(z) + Y_{n,p}(z) + \frac{2n(2n-1)}{z^2} X_{n,p}(z) \right\} F_n^p \right] \cos 2n\varphi$$

$$M_{P,n} = -\frac{\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sum \left[ \left\{ 2\delta(2\delta+1) - (2\delta+4n^2)\nu \right\} \left( C_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{2n(2n-1)}{z^2} X_{n,p}(z) (1-\nu) + Y_{n,p}(z) + (2p-1+\nu) Y_{n,p-1}(z) \right\} E_n^p \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{2n(2n-1)}{z^2} Y_{n,p}(z) (1-\nu) - X_{n,p}(z) - (2p-1+\nu) X_{n,p-1}(z) \right\} F_n^p \right] \cos 2n\varphi$$

$$M_{\varphi,n} = \frac{\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sum \left[ \left\{ 2\delta(2\delta+1)\nu - (2\delta+4n^2) \right\} \left( C_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{2n(2n-1)}{z^2} X_{n,p}(z) (\nu-1) + \nu Y_{n,p}(z) + (2p\nu-\nu+1) Y_{n,p-1}(z) \right\} E_n^p \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{2n(2n-1)}{z^2} Y_{n,p}(z) (\nu-1) - \nu X_{n,p}(z) - (2p\nu-\nu+1) X_{n,p-1}(z) \right\} F_n^p \right] \sin 2n\varphi$$

$$M_{F\varphi,n} = \frac{(1-\nu)\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sum \left[ 2n(2\delta+1) \left( C_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} \right.$$

$$\left. + \left\{ (1-2n) \frac{2n}{z^2} X_{n,p}(z) - 2n Y_{n,p-1}(z) \right\} E_n^p \right.$$

$$\left. + \left\{ (2n-1) \frac{2n}{z^2} Y_{n,p}(z) - 2n X_{n,p-1}(z) \right\} F_n^p \right] \sin 2n\varphi$$

$$Q_{P,n}^* = -\frac{\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\pi}{3} \sum \left[ \left\{ 4n^2(2\delta\nu+\nu+1) - 8\delta^2(\delta+1) \right\} \left( C_n^\delta \cos \frac{\delta\pi}{2} + D_n^\delta \sin \frac{\delta\pi}{2} \right) \frac{1}{z^{2\delta+2}} \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{4n^2(2n-1)(1-\nu)}{3^2} X_{n,p}(\xi) + (2p+2n) Y_{n,p}(\xi) + \{4n^2(1-\nu) + 4p(p-n-1)\} Y_{n,p-1}(\xi) \right. \\
& \quad \left. - 3^2 X_{n,p-1}(\xi) \right\} E_n^p - \left\{ \frac{4n^2(2n-1)(1-\nu)}{3^2} Y_{n,p}(\xi) - (2p+2n) X_{n,p}(\xi) \right. \\
& \quad \left. - \{4n^2(1-\nu) + 4p(p-n-1)\} X_{n,p-1}(\xi) - 3^2 Y_{n,p-1}(\xi) \right\} F_n^p \Big] \cos 2n\varphi
\end{aligned}$$

$\Sigma$  は  $\xi$  に関し  $\sum_{q=1}^n$ ,  $P$  に関し  $\sum_{p=0}^{\infty}$  を示すものがある。

$\partial_r^*$  は置換算子である。 $\sin 2n\varphi$  の展開を含む項に対しては同様の解が成立する。

未知常数は  $C_n^*$ ,  $D_n^*$ ,  $E_n^*$ ,  $F_n^*$  であり、境界条件より決定される。尚 参考まで 1 次を示す。

$$X_{0,0} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{kei} \xi, \quad Y_{0,0} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ker} \xi$$

$$X_{0,-1} = -\frac{2}{\pi \xi} \operatorname{ker}' \xi, \quad Y_{0,-1} = -\frac{2}{\pi \xi} \operatorname{kei}' \xi$$

$$X_{0,1} = -\frac{2}{\pi} \xi \operatorname{kei}' \xi, \quad Y_{0,1} = -\frac{2}{\pi} \xi \operatorname{ker}' \xi$$

$$\frac{d}{d\xi} [X_{n,p}(\xi)] = k \left[ \frac{2n}{3} Y_{n,p}(\xi) + 3 Y_{n,p-1}(\xi) \right]$$

$$\frac{d}{d\xi} [Y_{n,p}(\xi)] = k \left[ \frac{2n}{3} Y_{n,p}(\xi) - 3 X_{n,p-1}(\xi) \right]$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [X_{n,p}(\xi)] = \frac{2n(2n-1)}{3^2} k^2 X_{n,p}(\xi) + k^2 [Y_{n,p}(\xi) + (2p-1) Y_{n,p-1}(\xi)]$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [Y_{n,p}(\xi)] = \frac{2n(2n-1)}{3^2} k^2 Y_{n,p}(\xi) - k^2 [X_{n,p}(\xi) + (2p-1) X_{n,p-1}(\xi)]$$

$$\Delta(\zeta^p H_{2n-2}^{(1)}(\zeta)) = -2p \zeta^{p-1} H_{2n+1-p}^{(1)}(\zeta) - \zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta)$$

$$(L+1) \{ \zeta^p H_{2n-p}^{(1)}(\zeta) \} = -2p \zeta^{p-1} H_{2n+1-p}^{(1)}(\zeta)$$

$$= -1 \quad k^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4R}$$

§4 軸方向に一様圧縮を受ける場合の円孔まわりの

応力状態について (計算例)

円筒方向に等分布圧縮力を受ける円孔を有する円板の円筒殻について、円孔まわりの応力状態を上述の解を用

いて求める。このような荷重状態は、煙突、円筒殻を構造物の支持体として使用する場合には普通に見られるものである。解析方針及び仮定は次の通りである。

円筒殻は充分に長く、従って載荷荷の境界条件は円孔周辺の応力擾乱に寄与しないとする。もし円孔が無い場合、円筒中央部は全く薄膜状態と考えられる。円筒中央部にある円孔周辺の応力状態は、この薄膜状態解に曲げ附加応力が添加されたものである。従って、まず円筒殻の薄膜状態解を求め、円孔周辺の境界条件を満足するように曲げ附加応力を求める。円孔周辺の境界条件は次のように与えられる。

$$(N_F)_B + (N_F)_M = (N_F\varphi)_B + (N_F\varphi)_M = M_F = Q_F^* = 0$$

未知数の数と条件式の数は一一致、曲げ附加応力は決定される。

断面力は Hankel 函数 (或は ber, kei 函数) の級数の形であって、この函数は周期函数である故に  $p$  の範囲によって値は大きく変動する。実用上  $p$  の取り得る範囲  $p=0 \sim 3$  とする。又  $n=0, 1, 2$  とする。従って  $B_n$  ( $n=3, 4, \dots, p=0, 1, 2$ )  $\equiv 0$  と取り扱う。即ち  $n=3, 4$  の項は全く存在しないものとして行うのである。従って  $n=0, 1, 2$  の項の  $n \geq 3$  の項への与えた影響の反作用として  $n=0, 1, 2$  の項へ入って来る部分は全く無いものと考えなければならない。 $n \leq -1$  に対しては同様である。

(2) より、

$$\psi_0 = A_0^0 \log r + B_0^0 H_0^{(0)}(\zeta) + B_0^1 \zeta H_1^{(1)} + B_0^2 \zeta^2 H_2^{(2)} + B_0^3 \zeta^3 H_3^{(3)}$$

$$\psi_1 = A_1^1 \frac{1}{\zeta^2} + B_1^0 H_2^{(0)} + B_1^1 \zeta H_1^{(1)} + B_1^2 \zeta^2 H_0^{(0)} + B_1^3 \zeta^3 H_1^{(1)}$$

$$\psi_2 = A_2^2 \frac{1}{\zeta^2} + A_2^3 \frac{1}{\zeta^4} + B_2^0 H_4^{(0)} + B_2^1 \zeta H_3^{(1)} + B_2^2 \zeta^2 H_2^{(2)} + B_2^3 \zeta^3 H_1^{(1)}$$

= = =

$$A_0^0 = i D_0^0 \quad A_1^1 = A_1^1, \quad A_2^2 = A_2^2, \quad A_2^1 = A_1^1$$

$$B_0^1 = B_{0,a}^1 + B_{0,b}^1 + B_{0,c}^1 = \frac{1}{8} (B_2^0 + B_0^0 - 2B_1^0)$$

$$B_0^2 = B_{0,a}^2 + B_{0,b}^2 = \frac{1}{32} (B_2^0 + B_0^0 - B_1^0)$$

$$B_0^3 = B_{0,a}^3 = -\frac{1}{192} B_1^0$$

$$B_1^1 = B_{1,a}^1 + B_{1,b}^1 + B_{1,c}^1 = -\frac{3}{16} (B_2^0 + B_0^0)$$

$$B_1^2 = B_{1,a}^2 + B_{1,b}^2 = \frac{1}{16} B_1^0$$

$$B_1^3 = B_{1,a}^3 = -\frac{1}{192} (B_2^0 + B_0^0)$$

$$B_2^1 = B_{2,a}^1 + B_{2,b}^1 + B_{2,c}^1 = -\frac{1}{8} (B_2^0 + B_0^0 + 3B_1^0)$$

$$B_2^2 = B_{2,a}^2 + B_{2,b}^2 = \frac{1}{32} (B_2^0 + B_0^0 + B_1^0)$$

$$B_2^3 = B_{2,a}^3 = -\frac{1}{192} B_1^0$$

----- (27)

(28)  $\phi$  を  $\lambda$  の 2 全未知常数の数  $C_1, C_2, D_0^0, D_1^1, D_2^2, E_0^0, E_1^1, E_2^2, F_0^0, F_1^1, F_2^2$  の計 11 個と仮定する。境界条件は  $n=0$  で 3 個 ( $N_{\phi\phi}=0$  は満足される 11 個) 他は 4 個ずつ計 11 個と仮定する。

境界条件 荷重を  $p$  とすると

$$(N_r)_M = -p, \quad (N_\theta)_M = (N_{r\theta})_M = 0$$

=  $\phi$  を  $\theta$ ,  $\phi$  の変数に座標変換すると,

$$(N_\theta)_M = -\frac{p}{2} (1 + \cos 2\phi), \quad (N_{\phi\phi})_M = \frac{p}{2} \sin 2\phi$$

従って境界における曲げ附加力  $\phi$  は

$$(N_\theta)_B = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) E$$

$$\left. \begin{aligned} (N_{\varphi})_B &= -\frac{1}{2} P \sin 2\varphi \\ M_{\varphi,B} &= Q_{\varphi,B}^* = 0 \end{aligned} \right\} \text{ at } \varphi = a \quad (28)$$

$k = 0.850 \text{ [L}^{-1}\text{]}, \quad \nu = 0.3, \quad \bar{\gamma}_0 = 2.00$  とする。(一例  $R = 7.5 \text{ cm}$

$a = 0.3 \text{ cm}, \quad u = 2.53 \text{ cm}$  従って実験は上の寸法による。)

Hankel 函数  $H_\nu^{(1)}(z)$  ( $\nu = 0, 1$ ) は数表に与えられており、<sup>[3]</sup>

$\nu \geq 2$  は Bessel 函数の漸化式を用いて求める。

結果

未知数は次のとおり与えられる。

$n$	C	D	E	F
0	—	2.248016	-13.2963	-4.98270
1	38.19342	22.86990	18.8874	-34.15330
2	1904.8611	1249.800	40.2611	-61.3944

これらを(27)に入れると他の係数が決まる。本計算では  $P = 0 \sim 3$  までとったが、それが充分であることを示す。

$B_n^s$  ( $k = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ ) を示すと、

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$E^s$	-0.09837	-0.140441	-0.098372
$F^s$	0.17788	0.34571	0.17788

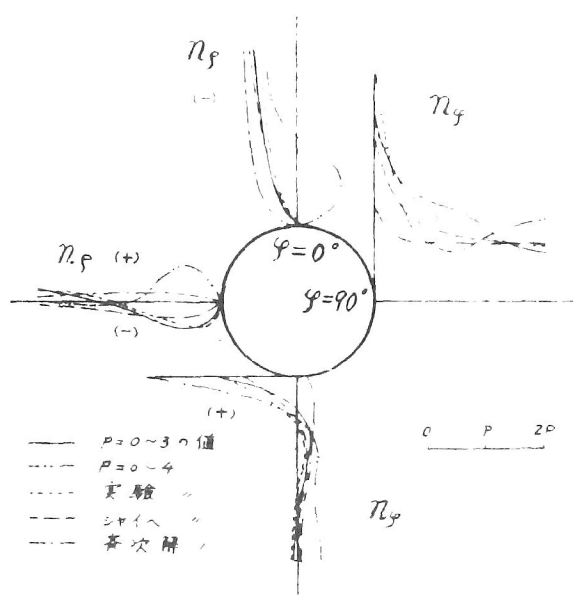
である。  $P=0$  の値に対して係数は約 0.5% となる。  $P$  の増加に対する Hankel 函数の増加は、  $\bar{\gamma}_0 = 2.00$  で

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$P=0$	$0.12 - 4 + 0.0265i$	$-0.19671 - 0.166436i$	$-0.542469 + 1.7665i$
$P=3$	$-2.120472 + 4.26687i$	$-0.542441 - 1.11944i$	$0.542441 + 1.11944i$

である。従って  $P = 0 \sim 3$  で充分である。

$n$  方向に対しては、 $|E|$ ,  $|F|$  は増加していく、傾向にあるが、

$P=3$  までは充分であるといえるから、今の場合境界条件も考慮して互いの係数の影響、及び範囲を考えて  $n=0, 1, 2$  と充分である。  
結果を表及び図に示す。



結果より次のことがいえる。

1. 壁板と比較してかなり大きな応力集中があるが、実験値と合致するところからも  $P=$  以下の値と充うに実際の応力は漸を示しているといえよう。

$$(n_\phi)_{\phi=90^\circ} = 3.5998 P$$

である

2. 応力攪乱の影響の減衰は予想されるほどには急激ではない。

3. 奇次解りしによる値 即ち D. Withum と同様の方法

表I 円孔周辺断面力(係数)  $p=1 [ML^{-1}]$ 

	n		r					
			2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	
N <sub>r</sub>	0	m	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	
		b	0.50000	0.15571	0.01911	-0.05102	-0.07183	
	1	m	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	x cos 2θ
		b	0.50000	0.59042	0.37884	0.23446	0.13500	x cos 2θ
	2	m	0	0	0	0	0	x cos 4θ
		b	0	-0.06039	0.09297	0.18264	0.22647	x cos 4θ
N <sub>θ</sub>	0	m	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	-0.50000	
		b	-0.86692	-0.38992	-0.36035	-0.27055	-0.08405	
	1	m	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	x cos 2θ
		b	2.00064	0.43302	0.20239	0.10686	-0.02520	x cos 2θ
	2	m	0	0	0	0	0	x cos 4θ
		b	0.26774	-0.16192	-0.10411	0.06467	0.13660	x cos 4θ
M <sub>r</sub> EA	0	m	0	0	0	0	0	
		b	0	0.14384	0.03415	-0.16346	-0.24872	
	1	m	0	0	0	0	0	x cos 2θ
		b	0	0.08686	0.12355	0.20413	0.22132	x cos 2θ
	2	m	0	0	0	0	0	x cos 4θ
		b	0	-0.05618	-0.20824	-0.25736	-0.08066	x cos 4θ

但し  $p=0 \sim 3$ 

m ; 法膜状態によるもの

b ; 曲げ附加量

$$\left. \begin{array}{l} N_r \\ N_\theta \\ \frac{M_r}{EA} \end{array} \right\} = N_0 + N_1 \cos 2\theta + N_2 \cos 4\theta$$

表 II 円孔周辺断面力

 $P=1 \text{ [ML}^{-1}\text{]}$ 

断面力	$\varphi$	$r$				
		2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
$N_r$	$0^\circ$	0	-0.31425	-0.50908	-0.63392	-0.71039
	$90^\circ$	0	-0.49509	-0.26675	-0.00080	0.01966
$N_\varphi$	$0^\circ$	1.40146	-0.11801	-0.26207	-0.09902	0.02735
	$90^\circ$	-3.59982	-1.98486	-1.06685	-1.31263	-0.92225
$\frac{M_r}{KA}$	$0^\circ$	0	0.17452	-0.05053	-0.26776	-0.10805
	$90^\circ$	0	0.00080	-0.29764	-0.62503	-0.55070

表 III 片次解のみを考慮した断面力  $P=1 \text{ [ML}^{-1}\text{]}$ 

断面力	$\varphi$	$r$				
		2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
$N_r$	$0^\circ$	0	-0.71594	-0.87722	-0.93200	-0.95609
	$90^\circ$	0	0.12896	0.10955	0.08069	0.05934
$N_\varphi$	$0^\circ$	-0.14237	-0.34372	-0.18096	-0.09777	-0.05362
	$90^\circ$	-1.85763	-1.06930	-1.05136	-1.05092	-1.04963
$\frac{M_r}{KA}$	$0^\circ$	0	0.15052	0.01952	-0.01107	-0.01199
	$90^\circ$	0	-0.15052	-0.01952	0.01107	0.01199

表 IV Scheibe の断面力

 $P=1 \text{ [ML}^{-1}\text{]}$ 

断面力	$\varphi$	$r$				
		2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
$N_r$	$0^\circ$	0	-0.30863	-0.52714	-0.67250	-0.76318
	$90^\circ$	0	-0.27835	-0.24054	-0.17882	-0.13350
$N_\varphi$	$0^\circ$	1.00000	0.04937	-0.03520	-0.04118	-0.03564
	$90^\circ$	-3.00000	-1.40238	-1.19714	-1.10750	-1.06762

によった場合の精度は大変に悪い。

4. 微小ではあるが壁板と符号のちがった応力状態を示す所もあることは注意されたい。

附.

- 有次解のみの場合 未知常数は5個となり、

$$E_0 = F_0 = E_2 = F_2 = D_2 = C_2 = 0$$

となる。

- 面内に圧縮力を受ける壁板の応力

$$N_r = \frac{P}{2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} + \frac{4a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right\}$$

$$N_\varphi = \frac{P}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right\}$$

- 実験

模型 アクリライト製 全高 30.0 cm 外径 15.0 cm 殻厚 3.0 mm

弾性係数 曲げ  $E = 4.45 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  引張  $E = 3.72 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

圧縮  $E = 3.60 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

ポアソン係数  $\nu = 0.297$

本実験は主として圧縮故  $E = 3.60 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$   $\nu = 0.3$

として解析している。

载荷 Amelzer 圧縮試験機使用

歪測定 電気抵抗線型歪計

実験は  $15^\circ\text{C} \pm 0.5^\circ\text{C}$  中で行なった。



## 序

屋根として用いられる H.P. 殻 (主として偏平殻である) には、天窓として円孔があけられる場合が多い。従って円形境界に対する解が必要となる。ところで今までに報告されている H.P. 殻の解は方形境界についてのものがあって、釣屋根として H.P. シェルを用いると近似似的に、或は上述の如き天窓をあけると、いざいざあけられる円形境界に対する解は未だ内外に見当りなかった。

基本式において極座標系に変数変換を行なうと二変数の変数分離が不可能となる。この問題は全く前章と同じである。従って前章のイテラションの手法を用いた半二法と同様の手法に従ってこの問題に対する解を得る。この解は前章の解と同様に無限級数となり、その収斂性が問題となるが、それを数学的に証明することは極めて困難であって不可能に近い。従ってここでは実用的に数項をとって、その減衰性から工学的に収斂性は充分であることを示す。二二に得られた解は二が境界条件に対して満足されるものがあり、この方面の解析にとっては有効で役立つものである。二二では、まず円形境界に対する一般解を求め、その応用計算例として円孔があけられる場合の円孔まわりの応力状態を論ずる。この時の H.P. 殻は等分布荷重を受けているものとする。

曲面の形  $z = xy/c$

$h$  ; 殻厚

$E$  ; 弾性係数

$\mu$  ; ポアソン比

$D$  ;  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$

$\nabla$  ;  $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\bar{\nabla}$  ;  $\bar{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

$\bar{\nabla}$  ;  $\bar{\nabla} = \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d}{dp} - \frac{n^2}{p^2}$

$r$  ; 原点からの距離

$k$  ;  $k = \sqrt{12(1-\mu^2)}/h$

$\rho$  ;  $\rho = \sqrt{k/c} r$

$\psi_n$  ;  $\psi_n = \phi_n + A w_n$

$\Xi_n$  ;  $\Xi_n = \phi_n - A w_n$

$A$  ;  $A = Eh^2/\sqrt{12(1-\mu^2)}$

## §2 基礎方程式

H.P 殻は偏平とし、 $z = x y / c$  で与える。この場合基礎式は次の通りである。

$$\nabla \nabla \phi - 2 \frac{E h}{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w = 0 \quad (1-1)$$

$$D \nabla \nabla w + \frac{2}{c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi = Z \quad (1-2)$$

$\phi$ : 応力函数  $w$ : 法線方向(鉛直方向)変位

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad h: \text{厚さ} \quad \mu: \text{ポアソン比}$$

$Z$ : 法線方向(鉛直方向)外力

境界の影響を論ずる解を得ることが目的である故 以後では上式の斉次解についてのみ論を進める。

(1-1), (1-2) にあいて次の座標変換を行う。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(1) に代入すると基礎式は次のようになる

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \phi - \frac{2 E h}{c} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ \left. + \cos 2\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} w = 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} D \nabla \nabla w + \frac{2}{c} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ \left. + \cos 2\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \phi = 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

$w$  と  $\phi$  とを Fourier 展開する。この型式の H.P 殻では  $w$  と  $\phi$  とが  $\theta$  に用いて  $\pi/2$  の位相差をもつことは容易にわかるからまず次の展開を行う。

$$\omega = \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \cos n\theta, \quad \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin n\theta$$

(2-1)に代入し、 $\sin n\theta$ の係数を零に等しと置いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_n \bar{\nabla}_n \phi_n - \frac{Eh}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2n-3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n(n-2)}{r^2} \right) \omega_{n-2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2n+3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n(n+2)}{r^2} \right) \omega_{n+2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

同様に(2-2)式より、次を得る。

$$\begin{aligned} D \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \omega_0 + \frac{1}{2c} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} \right) \phi_2 = 0 \quad (3-2) \\ D \bar{\nabla}_n \bar{\nabla}_n \omega_n - \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2n-3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n(n-2)}{r^2} \right) \phi_{n-2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2n+3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n(n+2)}{r^2} \right) \phi_{n+2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

(3-1), (3-3)は全く同じ形にある。従って

$$A = \frac{Eh^2}{12k(1-\mu^2)}, \quad k = \frac{1}{h} \sqrt{12(1-\mu^2)}, \quad r \sqrt{\frac{k}{c}} = \rho \quad (4)$$

とおくと、(3)式は次の形にまとめられる。

$$\bar{\Psi}_n = \phi_n + A \omega_n, \quad \bar{\Psi}_0 = A \omega_0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nabla_n \nabla_n \bar{\Psi}_n = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2n-3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{n(n-2)}{\rho^2} \right) \bar{\Psi}_{n-2} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2n+3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{n(n+2)}{\rho^2} \right) \bar{\Psi}_{n+2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ここに } n=0, 1, 2, \dots, \quad \nabla_n = \frac{d}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}$$

同様に

$$\bar{\Phi}_n = \phi_n - A \omega_n, \quad \bar{\Phi}_0 = -A \omega_0 \quad (7)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_n \bar{\nabla}_n \Phi_n = & -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2n-3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{n(n-2)}{\rho^2} \right) \Phi_{n-2} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2n+3}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{n(n+2)}{\rho^2} \right) \Phi_{n+2} \quad (8) \end{aligned}$$

(6), (8) 式を解けば、 $\phi, w$  は決定される。ところで (6), (8) 式において  $n=0$  とすると、(3-2) 式との比較から

$$\Psi_{-2} \equiv A w_2, \quad \Phi_{-2} \equiv -A w_2 \quad (9)$$

となる。又  $n=1$  とすると同様に次のようになる。

$$\Psi_{-1} \equiv \Psi_1, \quad \Phi_{-1} \equiv \Phi_1 \quad (10)$$

従って (6), (8) 式を解けば、円形境界の解は得られたことになる。これらの式を見ると、 $n$  に関する漸化関係式であるが、互いに interact しあっている函数  $\Psi_n, \Phi_n$  は  $n$  に關して 2 つづちがっている。従って (6), (8) 式の解は  $n$  が偶数のときと奇数のときとは全く独立に取り扱えることがわかる。

$$\text{なお } \phi = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos n\theta, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin n\theta$$

と展開した場合、(3-1), (3-2) の代りに次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_n \bar{\nabla}_n \phi_n - \frac{Et}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} + \frac{2n+3}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} + \frac{n(n+2)}{\gamma^2} \right) w_{n+2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} - \frac{2n-3}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} + \frac{n(n-2)}{\gamma^2} \right) w_{n-2} \right\} = 0 \\ D \bar{\nabla}_n \bar{\nabla}_n w_n - \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} + \frac{2n+3}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} + \frac{n(n+2)}{\gamma^2} \right) \phi_{n+2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} - \frac{2n-3}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} + \frac{n(n-2)}{\gamma^2} \right) \phi_{n-2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

これは全く先と同じ形の式であって、 $n$  代  $\phi_{n+2}, \phi_{n-2}, w_{n+2}, w_{n-2}$  の項の符号が各々異っているのみである。従って解

法は同じである。(6)(8)式は無限連立常微分方程式であり、このままではとけない。従って近似解法を行なう。

まず(6)式において $\psi_n$ に関する斉次解を求め、その斉次解を右辺に代入することによって第一次近似として特解を求める。この方法を無限回くりかえし、それらの総和を求めれば厳正解は得られるはずである。この手法は第二章と全く同様である。

(6)式の斉次解

$$\psi_0 = A_0^0 + C_0^0 p^2 + K_0^0 \log p + L_0^0 p^2 \log p$$

$$\psi_n = A_n^0 p^n + B_n^0 \frac{1}{p^n} + C_n^0 p^{n+2} + D_n^0 \frac{1}{p^{n-2}}$$

の未知常数 $A_n^0, B_n^0, C_n^0, D_n^0, K_0^0, L_0^0$ が(6)式の解の未知常数となり、この斉次解を代入して、以後求める特解の係数はこれらの未知常数の線型結合で表される。既述の操作を2~3回くりかえし行なえば、(6)式の一般解は次の形であらわされることわかる。

$n$ : 偶数の場合( $n=0$ を含む)

$$\psi_n = \sum_{p=0}^{\infty} A_n^p p^{n+4p} + \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} B_n^p p^{-n+4p} + \sum_{p=\frac{n}{2}}^{\infty} K_n^p p^{-n+4p} \log p \\ + \sum_{p=0}^{\infty} C_n^p p^{n+2+4p} + \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} D_n^p p^{-n+2+4p} + \sum_{p=\frac{n}{2}}^{\infty} L_n^p p^{-n+2+4p} \log p$$

$$\text{但し } A_n^p = \sum_{i=1}^{\infty} A_{n,i}^p, \text{ 以下同じ} \quad (8)$$

$$\text{又 } B_{n,i}^p, D_{n,i}^p \equiv 0 \quad \text{for } p \geq \frac{n}{2}$$

$$K_{n,i}^p, L_{n,i}^p \equiv 0 \quad \text{for } p < \frac{n}{2}$$

ここで上式の総和は次の意味である。

$$\Psi_n = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_n^p, \quad \psi_n^p = \sum_{i=0}^p A_{n,i}^p p^{n+4i} + \dots$$

$$a = p + 1 - q$$

$A_n^p$ 等の係数は $\psi^{p-1}$ の $\psi^p$ への影響を調べることによって次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} & A_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 + 8n(p-v) \} \cdot (4p-4v-2)(4p-4v-2+2n) \\ & + \alpha_v K_{n,1+v-(n/2)}^{p+(n/2)-v} \cdot 4(4p-4v+n-1) \{ (4p-4v+2n)^2 - 2(4p-4v+2n) \\ & \times (n+1) + 2n \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = A_{n-2,v}^{p-v} \cdot 2(p-v)(4p-4v-2) - A_{n+2,1+v}^{p-1-v} (2p-2v+n-1)(4p-4v+2n) \\ & + \alpha_v K_{n-2,1+v-(n/2)}^{p+(n/2)-v-1} (4p-4v-1) - \alpha_v K_{n+2,v-(n/2)}^{p+(n/2)-v} (4p-4v+2n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} \{ (4p-4v-2)^2 - 2n(4p-4v-2) \} \\ & = B_{n-2,1+v}^{p-v-1} (4p-4v-2n)(2p-2v-n-1) - B_{n+2,v}^{p-v} (2p-2v)(4p-4v-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & K_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v-2-2n)(4p-4v-2) \\ & = K_{n-2,1+v}^{p-v-1} (4p-4v-2n)(2p-2v-n-1) - K_{n+2,v}^{p-v} (2p-2v)(4p-4v-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v+2+2n) \\ & + \alpha_v L_{n,1+v-(n/2)}^{p+(n/2)-v} \cdot 4(\alpha+n-1) \{ (4p-4v-2n)^2 + (4p-4v-2n)(1-n) \\ & - 2n \} = C_{n-2,v}^{p-v} (2p-2v)(4p-4v+2) - C_{n+2,v+1}^{p-v-1} (4p-4v+2n) \\ & (2p-2v+2) + \alpha_v L_{n-2,1+v-(n/2)}^{p+(n/2)-v-1} (4p-4v+1) - \alpha_v L_{n+2,v-(n/2)}^{p+(n/2)-v} \\ & \times (4p-4v+2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v+2-2n) \\ & = D_{n-2,1+v}^{p-v-1} (4p-4v-2n)(2p-2v-n+1) \end{aligned}$$

$$L_{n,1+v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v+2-2n) \\ = L_{n-2,1+v}^{p-v-1} (4p-4v-2n)(2p-2v-n+1) - L_{n+2,v}^{p-v} (2p-2v)(4p-4v+2)$$

$$K_{n,p+1-(n/2)}^{n/2} = \frac{1}{4} B_{n+2,p-(n/2)}^{n/2} + \frac{1}{8n(n-1)} K_{n-2,p-(n/2)+1}^{(n/2)-1}$$

$$L_{n,p+1-(n/2)}^{n/2} = \frac{-1}{4} D_{n+2,p-(n/2)}^{n/2} + \frac{1}{8n(n+1)} L_{n-2,p-(n/2)+1}^{(n/2)-1}$$

ここに

(9)

$$K_n^l \equiv L_n^l \equiv 0 \quad (l \leq \frac{n}{2} - 1)$$

$$B_n^l \equiv D_n^l \equiv 0 \quad (l \geq \frac{n}{2})$$

$$\alpha_v = \begin{cases} 1 & v \geq \frac{n}{2} \\ 0 & v < \frac{n}{2} \end{cases}$$

一般に

$$M_{j,0}^i \equiv 0, \quad M_{j,l}^0 \equiv 0 \quad (i \geq 2)$$

従って  $A_n^0$  等より出発すれば全ての係数は逐次一意的に決定される。一般に  $M_{-2,j}^i$  の形のときは後述する。

かくて解は(8)の如く、厳正に

$$\psi_n = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_n^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \psi_n^q$$

の形であらわされることになる。

$n$ : 奇数の場合

$$\psi_n = \sum_{p=0}^{\infty} A_n^p p^{n+4p} + \sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} B_n^p p^{-n+4p} + \sum_{p=0}^{\infty} N_n^p p^{n+4+4p} \\ + \sum_{p=0}^{\infty} C_n^p p^{n+2+4p} + \sum_{p=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} D_n^p p^{-n+2+4p} + \sum_{p=\frac{1}{2}(n+1)}^{\infty} K_n^p p^{-n+4p} \log p \\ + \sum_{p=\frac{1}{2}(n-1)}^p L_n^p p^{-n+2+4p} \log p$$



の形で一般解をあらわすことができる。先程と同様に係数の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & A_{n,1+v}^{P-v} \{ 16(p-v)^2 + 8n(p-v) \} (4p-4v-2)(4p-4v-2+2n) \\
 & + N_{n,2+v}^{P-1-v} \{ 16(p-v)^2 + 8n(p-v) \} (4p-4v-2)(4p-4v-2+2n) \\
 & + \beta_v L_{n,1+v-\frac{1}{2}(n-1)}^{P+\frac{1}{2}(n-1)-v} \{ 4(4p-4v-1+n) \} (4p-4v+2n-2)^2 \\
 & + 2(4p-4v+2n-2)(1-n)-2n \} \\
 & = A_{n-2,v}^{P-v} 2(p-v)(4p-4v-2) - A_{n+2,1+v}^{P-v-1} (2p-2v+n) \\
 & (4p-4v+2n-2) + N_{n-2,2+v}^{P-1-v} 2(p-v)(4p-4v-2) \\
 & - N_{n+2,2+v}^{P-v-2} (2p-2v+n)(4p-4v+2n-2) + \beta_v L_{n-2,1+v-\frac{1}{2}(n-1)}^{P+\frac{1}{2}(n-1)-v-1} (4p-4v-1) \\
 & - \beta_v L_{n+2,v+\frac{1}{2}(n-1)}^{P+\frac{1}{2}(n-1)-v} (4p-4v+2n-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{n,1+v}^{P-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v-2)(4p-4v-2-2n) \\
 & = B_{n-2,1+v}^{P-v-1} (2p-2v-n)(4p-4v-2n-2) - B_{n+2,v}^{P-v} (2p-2v)(4p-4v-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_{n,1+v}^{P-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v-2)(4p-4v-2-2n) \\
 & = K_{n-2,1+v}^{P-1-v} (2p-2v-n)(4p-4v-2n-2) - K_{n+2,v}^{P-v} (2p-2v)(4p-4v-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C_{n,1+v}^{P-v} \{ 16(p-v)^2 + 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v+2+2n) \\
 & + \beta_v K_{n,1+v-\frac{1}{2}(n+1)}^{P+\frac{1}{2}(n+1)-v} \cdot 4(4p-4v+n+1) \{ (4p-4v+2n+2)^2 \\
 & - 2(4p-4v-2n+2)(1+n) + 2n \} \\
 & = C_{n-2,v}^{P-v} (2p-2v)(4p-4v+2) + C_{n+2,1+v}^{P-1-v} (2p-2v+n)(4p-4v+2n+2) \\
 & + \beta_v K_{n-2,v-\frac{1}{2}(n+1)+1}^{P-v+\frac{1}{2}(n+1)-1} (4p-4v+1) - \beta_v K_{n+2,v-\frac{1}{2}(n+1)}^{P-v+\frac{1}{2}(n+1)} (4p-4v+2n+1)
 \end{aligned}$$

$$D_{n,1+v}^{P-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v-2n+2)$$

$$= D_{n-2, 4v}^{p-v-1} (2p-2v-n)(4p-4v+2n+2) - D_{n+2, v}^{p-2} (2p-2v)(4p-4v+2)$$

$$\begin{aligned} & L_{n, 4v}^{p-v} \{ 16(p-v)^2 - 8n(p-v) \} (4p-4v+2)(4p-4v+2-2n) \\ &= L_{n-2, 4v}^{p-v-1} (2p-2v-n)(4p-4v+2n+2) - L_{n+2, v}^{p-v} (2p-2v)(4p-4v+2) \end{aligned}$$

$$K_{n, p-\frac{1}{2}(n+1)}^{\frac{1}{2}(n+1)} = -\frac{1}{2} B_{n+2, p-\frac{1}{2}(n+1)}^{\frac{1}{2}(n+1)} + \frac{1}{8n(n+1)} K_{n-2, p-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$L_{n, p+\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{1}{4} D_{n+2, p-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} + \frac{1}{8n(n-1)} L_{n-2, p-\frac{1}{2}(n-3)}^{\frac{1}{2}(n-3)}$$

$$\therefore 12 \quad A_{-1}^0 \equiv B_1^0, \quad A_{-i}^i \equiv 0 \quad (i \geq 1)$$

$$N_{-1}^i \equiv 0, \quad N_n^i \equiv 0 \quad (n \geq 1)$$

$$C_{-i}^i \equiv A_i^i, \quad K_{-i}^i \equiv L_i^i, \quad L_{-i}^i \equiv K_i^{i+1}$$

$$B_n^g \left[ g \geq \frac{1}{2}(n+1) \right] \equiv D_n^g \left[ g \geq \frac{1}{2}(n-1) \right] \equiv 0$$

$$K_n^g \left[ g < \frac{1}{2}(n+1) \right] \equiv L_n^g \left[ g < \frac{1}{2}(n-1) \right] \equiv 0$$

$$\text{一般に } MP(P < 0) \equiv 0, \quad M_{j,0}^i \equiv 0, \quad M_{j,2}^c (\bar{j} \geq 2) \equiv 0$$

$$\beta v = \begin{cases} 1 & v \geq \frac{1}{2}(n+1) \text{ (Kの場合)} \quad v \geq \frac{1}{2}(n-1) \text{ (Lの場合)} \\ 0 & v < \frac{1}{2}(n+1) \text{ (Kの場合)} \quad v < \frac{1}{2}(n-1) \text{ (Lの場合)} \end{cases}$$

$\Phi_n$  に関しても全く同じ形で書きあわせる事ができる。係数の漸化関係式は、 $\Psi_n$  の場合のそれにおいて、右辺の各項の符号を考えたものになる。以上で (16), (18) 式の解は決定されたのであるが、係数の各々の総和の収斂性については後程示す。求まった  $\Psi_n, \Phi_n$  を用いて  $\phi_n = \{\Psi_n + \Phi_n\}/2$ ,  $A\omega_n = \{\Psi_n - \Phi_n\}/2$  で決まる。ところで  $\Psi_n$  の未知係数をアルファベットの太文字,  $\Phi_n$  のそれを小文字で記して、次のように未知係数の表示変換を行なう。 $\Psi_n$  と  $\Phi_n$  の解の形が

全く同じ故

149

$$\left. \begin{aligned} (A_n + a_n) &= \bar{a}_n & \phi_n \text{の未知係数} \\ (A_n - a_n) &= \bar{A}_n & A_n \text{の未知係数} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以下同じ

$n=0$  の場合を考えると、 $\psi_0$  に対しては  $\bar{\psi}_0$  が、 $\bar{\psi}_0$  に対しては  $\psi_0$  が interact しているといえ、最初の出発点ではどちらも  $w_0$  のみに関しており、全く同じ解の形をとっている。このことより出発点となる未知係数の間に次の関係があると思なうことができる。

$$A_0^o = -a_0^o, \quad K_0^o = -k_0^o, \quad C_0^o = -c_0^o, \quad L_0^o = -l_0^o \quad (13)$$

このことの妥当性は未知係数の数と境界条件の数を考えることによって裏付けられる。次に  $n-2=-2$  の係数を考えると、 $\psi_{-2}$  と  $w_{-2}$ 、 $\bar{\psi}_{-2}$  と  $w_{-2}$  の関係から、

$$\begin{aligned} \bar{A}_{-2}^o &= \bar{B}_2^o, \quad \bar{A}_{-2}' = \bar{A}_{-2}^o, \quad \bar{A}_{-2}^p = \bar{A}_2^{p-1}, \quad \bar{K}_{-2}^o = \bar{K}_2', \quad \bar{K}_{-2}^{p-1} = \bar{K}_2^p \\ \bar{L}_{-2}^o &= \bar{L}_2', \quad \bar{L}_{-2}^{p-1} = \bar{L}_2^p, \quad \bar{C}_{-2}^o = \bar{D}_2^o, \quad \bar{C}_{-2}' = \bar{C}_2^o, \quad \bar{C}_{-2}^p = \bar{C}_2^{p-1} \end{aligned} \quad (14)$$

の関係となる。従って実際の計算に当たってまず、 $\psi_{-2}$ 、 $\bar{\psi}_{-2}$  を含まない状態で各係数を求め、しかる後  $\psi_{-2}$ 、 $\bar{\psi}_{-2}$  による付加量を求めるという手法によらねばならない。

又(14)の関係によつて

$$\bar{a}_0^o \equiv \bar{k}_0^o \equiv \bar{c}_0^o \equiv \bar{d}_0^o \equiv 0$$

となることは(9)より容易にわかり、 $\psi_0$  の項は消滅して、この解法に矛盾、不合理な点の全くないことが示される。係数の各々の総和の収斂性を数学的に論じ、証

明することは非常に困難であつて、不可能に近い。従つてここでは数個の  $n, p$  をとり、係数間の関係を数値計算して工学的に充分であることを示す。一般に境界条件として  $n$  が偶数の場合が多い。従つて (9) を見易い形に書き換える。

$$\begin{aligned}
 K_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{8C(4C-2)} K_{n-2,1+p-c}^{c-1} - \frac{1}{2(4C-2n)(4C-2-2n)} K_{n+2,p-c}^c \\
 L_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{8C(4C+2)} L_{n-2,1+p-c}^{c-1} - \frac{1}{2(4C-2n)(4C+2-2n)} L_{n+2,p-c}^c \\
 K_{n,1+p-\frac{n}{2}}^{n/2} &= \frac{1}{4} B_{n+2,p-\frac{n}{2}}^{n/2} + \frac{1}{8n(n-1)} K_{n-2,p-\frac{n}{2}+1}^{n/2-1} \\
 L_{n,1+p-\frac{n}{2}}^{n/2} &= -\frac{1}{4} D_{n+2,p-\frac{n}{2}}^{n/2} + \frac{1}{8n(n+1)} L_{n-2,p-\frac{n}{2}+1}^{n/2-1} \\
 A_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{4(2C+n)(4C+2n-2)} A_{n-2,p-c}^c - \frac{1}{8C(4C-2)} A_{n+2,p-c+1}^{c-1} \\
 &\quad + \alpha_{p-c} \frac{1+C-n}{(2C+n)^2(4C+2n-2)} K_{n-2,1+p-\frac{n}{2}-c}^{c+n/2-1} \\
 &\quad + \alpha_{p-c} \frac{4C-1}{16C^2(4C-2)^2} K_{n+2,p-\frac{n}{2}-c}^{c+n/2} \\
 B_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{8C(4C-2)} B_{n-2,1+p-c}^{c-1} - \frac{1}{2(4C-2n)(4C-2-2n)} B_{n+2,p-c}^c \\
 C_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{4(2C+n)(4C+2n+2)} C_{n-2,p-c}^c - \frac{1}{8C(4C+2)} C_{n+2,p-c+1}^{c-1} \\
 &\quad - \alpha_{p-c} \frac{4C+2n+1}{(2C+n)^2(4C+2+2n)^2} L_{n-2,p-\frac{n}{2}-c+1}^{c+n/2-1} \\
 &\quad + \alpha_{p-c} \frac{1+4C}{16C^2(4C+2)^2} L_{n+2,p-c-\frac{n}{2}}^{c+n/2} \\
 D_{n,1+p-c}^c &= \frac{1}{8C(4C+2)} D_{n-2,1+p-c}^{c-1} - \frac{1}{4(2C-n)(4C+2-2n)} D_{n+2,p-c}^c \\
 &\quad (C=0, 1, 2, \dots, P) \quad (15)
 \end{aligned}$$

$n=0, 2, 4, 6, 8$   $p=0, 1, 2, 3, 4$  をとり、(12) を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_0' &= -6.25 \times 10^{-2} \bar{a}_2 + 2.9294 \times 10^{-3} \bar{k}_0 + 7.3242 \times 10^{-5} \bar{b}_2 - 1.5258 \times 10^{-5} \bar{b}_4 \\
 \bar{A}_0^2 &= 6.5104 \times 10^{-4} \bar{A}_4 + 6.7817 \times 10^{-6} \bar{a}_2 - 7.6628 \times 10^{-7} \bar{k}_0 \\
 \bar{A}_0^3 &= -2.7126 \times 10^{-6} \bar{a}_6 - 2.2605 \times 10^{-8} \bar{A}_4
 \end{aligned}$$

$$\overline{A}_0^4 = 6.055 \times 10^{-9} \overline{A}_8$$

$$\overline{K}_0' = -3.9062 \times 10^{-3} \overline{K}_0 - 9.7656 \times 10^{-4} \overline{b}_2 + 2.0345 \times 10^{-5} \overline{B}_4$$

$$\overline{K}_0^2 = 1.6954 \times 10^{-6} \overline{K}_0$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_0' &= -2.0833 \times 10^{-2} \overline{C}_2 + 1.8084 \times 10^{-4} \overline{L}_0 - 4.5211 \times 10^{-5} \overline{a}_2 \\ &\quad + 2.8257 \times 10^{-5} \overline{D}_4 \end{aligned}$$

$$\overline{C}_0^2 = 1.3021 \times 10^{-4} \overline{C}_4 + 8.138 \times 10^{-7} \overline{C}_2 - 2.3948 \times 10^{-8} \overline{L}_0$$

$$\overline{C}_0^3 = 3.8752 \times 10^{-7} \overline{C}_6 + 2.3067 \times 10^{-9} \overline{C}_4$$

$$\overline{C}_0^4 = 6.7278 \times 10^{-10} \overline{C}_8$$

$$\overline{L}_0' = -4.3402 \times 10^{-4} \overline{L}_0 + 1.085 \times 10^{-4} \overline{a}_2 - 6.7816 \times 10^{-6} \overline{D}_4$$

$$\overline{L}_0^2 = 3.3908 \times 10^{-8} \overline{L}_0$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_2' &= -6.25 \times 10^{-2} \overline{a}_4 - 6.5104 \times 10^{-4} \overline{A}_2 + 2.5855 \times 10^{-5} \overline{B}_2 \\ &\quad (+ 7.2903 \times 10^{-5} \overline{K}_0) \end{aligned}$$

$$\overline{A}_2^2 = 6.5104 \times 10^{-4} \overline{A}_6 + 5.4253 \times 10^{-6} \overline{a}_4 + 5.6514 \times 10^{-8} \overline{A}_2$$

$$\overline{A}_2^3 = -2.7126 \times 10^{-6} \overline{a}_8 - 1.8165 \times 10^{-8} \overline{A}_6$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_2' &= 1.5625 \times 10^{-2} \overline{B}_2 - 3.2552 \times 10^{-4} \overline{b}_4 + 2.0345 \times 10^{-6} \overline{B}_6 \\ &\quad (+ 6.25 \times 10^{-2} \overline{K}_0) \end{aligned}$$

$$\overline{K}_2^2 = -3.0517 \times 10^{-5} \overline{B}_2 (-1.6275 \times 10^{-4} \overline{K}_0)$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_2' &= -2.0833 \times 10^{-2} \overline{C}_4 - 1.302 \times 10^{-4} \overline{C}_2 - 1.0003 \times 10^{-6} \overline{D}_2 \\ &\quad (+ 2.8123 \times 10^{-6} \overline{L}_0) \end{aligned}$$

$$\overline{C}_2^2 = 1.302 \times 10^{-4} \overline{C}_6 + 7.7505 \times 10^{-7} \overline{C}_4 + 4.844 \times 10^{-9} \overline{C}_2$$

$$\overline{C}_2^3 = 3.8752 \times 10^{-7} \overline{C}_8 + 2.0183 \times 10^{-9} \overline{C}_6$$

$$\begin{aligned} \overline{L}_2' &= -5.2083 \times 10^{-3} \overline{D}_2 + 3.2552 \times 10^{-4} \overline{a}_4 - 6.7816 \times 10^{-4} \overline{D}_6 \\ &\quad (+ 2.0833 \times 10^{-2} \overline{L}_0) \end{aligned}$$

$$\overline{L}_2^2 = 2.0345 \times 10^{-6} \overline{D}_2 (-5.4253 \times 10^{-6} \overline{L}_0)$$

$$\overline{A}_4' = -6.25 \times 10^{-2} \overline{a}_6 - 2.6041 \times 10^{-4} \overline{A}_4 - 2.7126 \times 10^{-6} \overline{a}_2$$

$$+ 6.3955 \times 10^{-7} \overline{K}_0$$

$$\overline{A}_4^2 = 6.510 \times 10^{-4} \overline{A}_8 + 2.9064 \times 10^{-6} \overline{a}_6 + 1.8165 \times 10^{-8} \overline{A}_4$$

$$\overline{A}_4^3 = -1.1303 \times 10^{-8} \overline{A}_8$$

$$\overline{B}_4' = 6.25 \times 10^{-2} \overline{b}_2 - 1.3021 \times 10^{-3} \overline{B}_4 + 8.138 \times 10^{-6} \overline{b}_6$$

$$\overline{K}_4^2 = 6.51 \times 10^{-4} \overline{K}_0 - 1.0173 \times 10^{-5} \overline{B}_4 + 3.255 \times 10^{-4} \overline{b}_2$$

$$\overline{K}_4^3 = -5.0863 \times 10^{-7} \overline{K}_0$$

$$\overline{C}_4' = -2.0833 \times 10^{-2} \overline{c}_6 - 6.2003 \times 10^{-5} \overline{C}_4 - 3.8752 \times 10^{-7} \overline{c}_2$$

$$+ 1.8741 \times 10^{-8} \overline{L}_0$$

$$\overline{C}_4^2 = 1.302 \times 10^{-4} \overline{C}_8 + 4.5266 \times 10^{-7} \overline{c}_6 + 2.0183 \times 10^{-9} \overline{C}_4$$

$$\overline{C}_4^3 = 1.3211 \times 10^{-9} \overline{C}_8$$

$$\overline{D}_4' = 2.0833 \times 10^{-2} \overline{d}_2 - 1.3021 \times 10^{-3} \overline{D}_4 + 2.7127 \times 10^{-5} \overline{d}_6$$

$$\overline{L}_4^2 = 1.302 \times 10^{-4} \overline{L}_0 - 6.5104 \times 10^{-5} \overline{d}_2 + 6.1035 \times 10^{-6} \overline{D}_4$$

$$\overline{L}_4^3 = -2.422 \times 10^{-8} \overline{L}_0$$

$$\overline{A}_6' = -6.25 \times 10^{-2} \overline{a}_8 - 1.395 \times 10^{-4} \overline{A}_6 - 5.8128 \times 10^{-7} \overline{a}_4$$

$$+ 6.055 \times 10^{-9} \overline{A}_2$$

$$\overline{A}_6^2 = 1.8084 \times 10^{-6} \overline{a}_8 + 6.055 \times 10^{-9} \overline{A}_6$$

$$\overline{B}_6' = 6.25 \times 10^{-2} \overline{b}_4 - 3.9062 \times 10^{-4} \overline{B}_6$$

$$\overline{B}_6^2 = 6.5104 \times 10^{-4} \overline{B}_2 - 2.7126 \times 10^{-5} \overline{b}_4 + 1.6954 \times 10^{-7} \overline{B}_6$$

$$\overline{K}_6^3 = 5.4252 \times 10^{-6} \overline{B}_2 (+ 2.7127 \times 10^{-6} \overline{K}_0)$$

$$\overline{C}_6' = -2.0833 \times 10^{-2} \overline{c}_8 - 3.6169 \times 10^{-5} \overline{C}_6 - 1.0764 \times 10^{-7} \overline{c}_4$$

$$+ 6.7278 \times 10^{-10} \overline{C}_2$$

$$\overline{C}_6^2 = 2.9593 \times 10^{-7} \overline{C}_8 + 7.7064 \times 10^{-10} \overline{C}_6$$

$$\overline{D}_6' = 2.0833 \times 10^{-2} \overline{d}_4 - 4.3402 \times 10^{-4} \overline{D}_6$$

$$\overline{D}_6^2 = 1.303 \times 10^{-4} \overline{D}_2 - 1.6276 \times 10^{-5} \overline{d}_4 + 3.3908 \times 10^{-7} \overline{D}_6$$

$$\bar{L}_6^3 = -2.9064 \times 10^{-7} \bar{D}_2 (+3.8752 \times 10^{-7} \bar{L}_0)$$

$$\bar{A}_8' = -8.68 \times 10^{-5} \bar{A}_8 - 1.9376 \times 10^{-7} \bar{a}_6 + 8.0734 \times 10^{-10} \bar{A}_4$$

$$\bar{A}_8^2 = 1.7125 \times 10^{-9} \bar{A}_8$$

$$\bar{B}_8' = 6.25 \times 10^{-2} \bar{B}_6$$

$$\bar{B}_8^2 = 6.5104 \times 10^{-4} \bar{B}_4 - 4.069 \times 10^{-6} \bar{b}_6$$

$$\bar{B}_8^3 = 2.7126 \times 10^{-6} \bar{b}_2 - 1.1303 \times 10^{-7} \bar{B}_4$$

$$\bar{K}_8^4 = 6.0546 \times 10^{-9} \bar{K}_0$$

$$\bar{C}_8' = -2.3674 \times 10^{-5} \bar{C}_8 - 4.1101 \times 10^{-7} \bar{c}_6 - 1.2232 \times 10^{-10} \bar{C}_4$$

$$\bar{C}_8^2 = 1.1856 \times 10^{-10} \bar{C}_8$$

$$\bar{D}_8' = 2.0833 \times 10^{-2} \bar{d}_6$$

$$\bar{D}_8^2 = 1.302 \times 10^{-4} \bar{D}_4 - 2.7126 \times 10^{-6} \bar{d}_6$$

$$\bar{D}_8^3 = 3.8752 \times 10^{-7} \bar{d}_2 - 4.844 \times 10^{-8} \bar{D}_4$$

$$\bar{L}_8^4 = 6.7279 \times 10^{-10} \bar{L}_0$$

であらわされる。 $\bar{a}_2' \sim \bar{e}_8^4$ は上の右辺のアルファベットの  
大文字を小文字に、小文字を大文字に変えたものであり、  
 $\bar{a}_4' \sim \bar{e}_4^3$ ,  $\bar{a}_8' \sim \bar{e}_8^4$ に含まれる $\bar{K}_0$ ,  $\bar{L}_0$ の項は零である。又上  
記中( )内の項は $\bar{a}_2' \sim \bar{e}_8^4$ のみにあらわされる部分である。  
上記の値に下記の諸量が付加される。

$$\bar{A}_2' = -1.0596 \times 10^{-5} \bar{B}_2 + 2.2076 \times 10^{-7} \bar{B}_4 - 1.3797 \times 10^{-9} \bar{B}_6$$

$$\bar{A}_2^2 = 3.3247 \times 10^{-9} \bar{B}_2 - 2.7127 \times 10^{-6} \bar{a}_4 + 2.8257 \times 10^{-8} \bar{A}_2 \\ - 3.2778 \times 10^{-11} \bar{B}_4$$

$$\bar{K}_2^2 = 1.0173 \times 10^{-5} \bar{B}_2 - 2.1193 \times 10^{-7} \bar{B}_4 + 1.3245 \times 10^{-9} \bar{B}_6$$

$$\bar{K}_2^3 = -1.3245 \times 10^{-9} \bar{B}_2$$

$$\bar{C}_2^1 = 4.3516 \times 10^{-7} \bar{D}_2 - 2.7197 \times 10^{-8} \bar{\alpha}_4 - 5.666 \times 10^{-10} \bar{D}_6$$

$$\bar{C}_2^2 = -5.6796 \times 10^{-11} \bar{D}_2 - 3.8752 \times 10^{-7} \bar{C}_4 - 2.4219 \times 10^{-9} \bar{C}_2 \\ + 1.4886 \times 10^{-12} \bar{\alpha}_4$$

$$\bar{L}_2^2 = -6.7817 \times 10^{-7} \bar{D}_2 + 4.2386 \times 10^{-8} \bar{\alpha}_4 - 8.8303 \times 10^{-10} \bar{D}_6$$

$$\bar{L}_2^3 = 3.7844 \times 10^{-11} \bar{D}_2$$

$$\bar{a}_4^1 = -5.1922 \times 10^{-8} \bar{B}_2 + 1.0817 \times 10^{-9} \bar{B}_4 - 6.7606 \times 10^{-12} \bar{B}_6$$

$$\bar{a}_4^2 = 7.1801 \times 10^{-13} \bar{B}_2$$

$$\bar{k}_4^3 = 4.24126 \times 10^{-8} \bar{B}_2 - 8.8302 \times 10^{-10} \bar{B}_4$$

$$\bar{k}_4^4 = -2.9565 \times 10^{-12} \bar{B}_2$$

$$\bar{C}_4^1 = 1.6075 \times 10^{-9} \bar{D}_2 - 1.0047 \times 10^{-10} \bar{\alpha}_4 + 2.0930 \times 10^{-12} \bar{D}_6$$

$$\bar{C}_4^2 = -1.3615 \times 10^{-13} \bar{D}_2$$

$$\bar{L}_4^3 = -2.0183 \times 10^{-9} \bar{D}_2 + 1.2615 \times 10^{-10} \bar{\alpha}_4 - 2.6280 \times 10^{-12} \bar{D}_6$$

$$\bar{L}_4^4 = 6.5701 \times 10^{-14} \bar{D}_2$$

$$\bar{A}_6^1 = -3.308 \times 10^{-11} \bar{B}_2 + 6.892 \times 10^{-13} \bar{B}_4$$

$$\bar{K}_6^4 = 9.461 \times 10^{-11} \bar{B}_2 - 1.971 \times 10^{-12} \bar{B}_4$$

$$\bar{C}_6^1 = 1.7444 \times 10^{-12} \bar{D}_2 - 1.0902 \times 10^{-13} \bar{\alpha}_4$$

$$\bar{L}_6^4 = 3.504 \times 10^{-12} \bar{D}_2 + 2.190 \times 10^{-13} \bar{\alpha}_4$$

未知係数は  $A_0 \sim f$ ,  $a_2 \sim f$ ,  $B_2 \sim f$ ,  $b_2 \sim f$ ,  $C_0 \sim f$ ,  $C_2 \sim f$ ,  $D_2 \sim f$ ,  $\alpha_2 \sim f$ ,  $K_0$ ,  $L_0$  の計 36 コである。

$w$ ,  $\phi$  が決まれば断面力は次の諸式より決まる。(4)より

$$N_r = \frac{k}{c} \left( \frac{1}{p} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)$$

$$N_\theta = \frac{k}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2}$$

$$N_{r\theta} = \frac{k}{c} \left( -\frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial p \partial \theta} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \phi$$



$$M_r = -D \frac{k}{c\rho^2} \left( \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w$$

$$M_\theta = -D \frac{k}{c\rho^2} \left( \nu \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu) D \frac{k}{c\rho^2} \left( \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w$$

$$Q_r^* = Q_r - \sqrt{\frac{k}{c}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta}$$

$$Q_r = -D \sqrt{\frac{k}{c}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{k}{c} \bar{\nabla} w \right)$$

$$Q_\theta = -D \sqrt{\frac{k}{c}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{k}{c} \bar{\nabla} w \right)$$

### §3 円孔があけられる場合の応力状態

H.P. 殻は一様等分布の垂直外力を受けているとする。力の釣合式において、外力に対する特解は Membrane 状態、で処理し、斉次解を円孔の境界条件も満たすように決める。従って局所的な応力攪乱のみを考えればよい。即ち力の釣合は円孔の存在によって乱されなうとする。故に円孔縁より単調に増大していく諸量と無視する。従って次のようにおくことができる。

$$A_n^0 = C_n^0 = 0 \quad (n \geq 0)$$

従って  $n=0, 2, 4, 6, 8$   $p=0 \sim 4$  までとすると未知数は次のようになる。  $\bar{B}_2^0, \bar{B}_4^0, \bar{B}_6^0, \bar{B}_8^0, \bar{D}_2^0, \bar{D}_4^0, \bar{D}_6^0, \bar{D}_8^0, \bar{L}_2^0, \bar{L}_4^0, \bar{L}_6^0, \bar{L}_8^0, \bar{d}_2^0, \bar{d}_4^0, \bar{d}_6^0, \bar{d}_8^0, \bar{K}_0, \bar{L}_0$  計 18コ

外力に対して Membrane 解をとる。

$$N_x = N_y = 0, \quad N_{xy} = \text{const} = P \quad (\text{rise factor } c \text{ 含む})$$

極座標系に変換するため次の式に代入する。

$$N_r = N_x \cos^2 \theta + N_y \sin^2 \theta + N_{xy} \sin 2\theta$$

$$N_\theta = N_x \sin^2 \theta + N_y \cos^2 \theta - N_{xy} \sin 2\theta$$

$$N_{r\theta} = (N_x - N_y)/2 \cdot \sin 2\theta + N_{xy} \cos 2\theta$$

境界条件  $N_r = N_{r\theta} = M_r = Q_r^* = 0$  (円孔縁に自由支持)  
を満足するように附加力を決定することが出来る。附加力  
に対する条件は次のようになる。

$$B N_r = -P \sin 2\theta, \quad B N_\theta = -P \cos 2\theta, \quad B M_r = B Q_r^* = 0$$

京大KDC-I (Digital型電子計算機) によって数値計算  
を行った。結果を表及び図に示す。

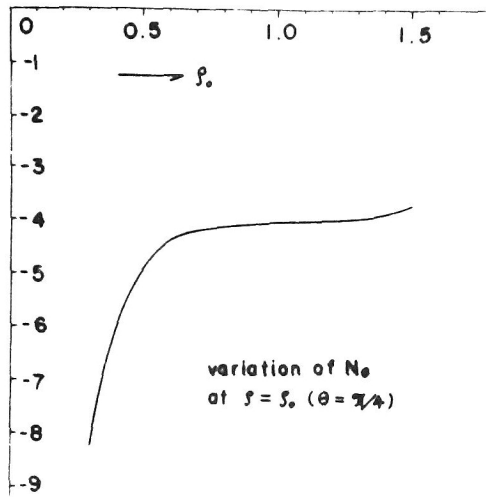
結果より見ると孔が小さくなる程、断面力の集中は大  
きくなる。ライズ要素 $h$ 或は厚さ $t$ が減少するにつれて  
 $\rho$ が大きくなるが、この場合の附加力の局地化は弱くなっ  
て影響は中の方まで影響を及ぼすことになる。

② 外力によって Membrane 状態解は次のようになる。

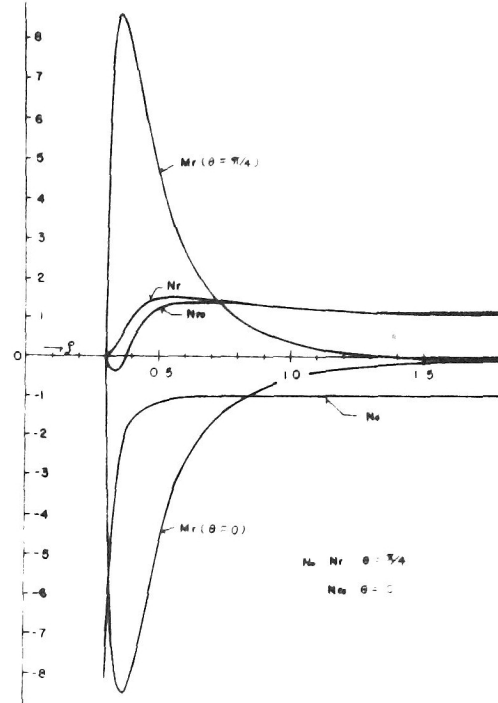
$$N_r = P \sin 2\theta, \quad N_\theta = -P \sin 2\theta, \quad N_{r\theta} = P \cos 2\theta$$

結果数値表における表現は次の通り。

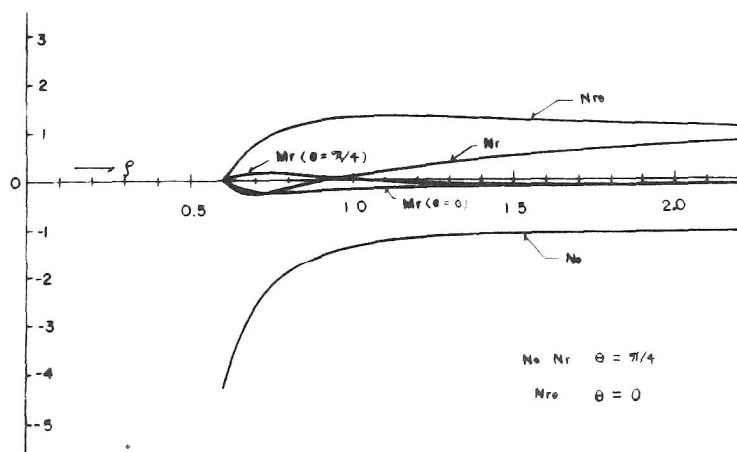
$$+1.1 \times 10^{-1} = +1+11 \quad (\text{例} \quad -0.0813 = -813-1)$$



$f = f_0$  における  $N_\theta$  の変化  
( $\theta = \pi/4$  の値である)



$$f_0 = 0.300$$



$$f_0 = 0.600$$

表 I-1 せんり 附加断面力 ( 荷重解部分よりのも )

 $\rho_0 = 0.300$ 

	$n$	0.300	0.350	0.400	0.500	0.700	1.00	1.50	
${}_B N_{\theta}$ $P$	$n=2$	-30001+1	-16195+1	-94933+0	-38883+0	-10084+0	-22625-1	+13615-2	$\times \sin 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	$n=6$	+41706+1	+13245+0	-38829+0	-24315+0	-50210-1	-74773-2	-86860-3	$\times \sin 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
${}_B N_{r/}$ $P$	$n=2$	-10000+1	-13195+1	-13008+1	-10514+1	-63383+0	-33637+0	-15667+0	$\times \sin 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	$n=6$	0	-58155+0	-12792+1	-15483+1	-10633+1	-56737+0	-25863+0	$\times \sin 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
${}_B N_{r\theta}$ $P$	$n=2$	-10000+1	-14989+0	+17586+0	+33131+0	+26618+0	+15531+0	+73032-1	$\times \cos 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	$n=6$	0	-11933+1	-75045+0	-11960+0	+10961+0	+84720-1	+42048-1	$\times \cos 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
${}_B M_{r/h}$ $P$	$n=0$	0	-94403-2	-17412-1	-30428-1	-49595-1	-69566-1	-91817-1	
	$n=2$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	$n=4$	0	-83236+1	-80462+1	-48214+1	-16005+1	-42757+0	-88118-1	$\times \cos 4\theta$
	$n=6$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	$n=8$	0	+60388-3	+77375-3	+11265-2	+14828-2	+16266-2	+16932-2	$\times \cos 8\theta$

表 I-2 曲げ部材断面力 (各次解部材よりのもの)

 $\rho_0 = 0.400$ 

	$\rho$	0.400	0.450	0.500	0.700	1.000	1.300	1.800	
$N_{\theta}$ P	n=2	-29982+1	-18722+1	-12281+1	-31957+0	-77841-1	-30502-1	-18369-1	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	+12844+1	+17294+0	-84384-1	-61355-1	-10641-1	-23815-2	-71563-4	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$N_r$ P	n=2	-10000+1	-12871+1	-13313+1	-98662+0	-56422+0	-35365+0	-19365+0	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	0	-10676+0	-30555+0	-46458+0	-29305+0	-18377+0	-99170-1	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$N_{r\theta}$ P	n=2	-10000+1	-29274+0	+51047-1	+33307+0	+24358+0	+16388+0	+95999-1	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	-37234+0	-30707+0	-14537-1	+34208-1	+26690-1	+15024-1	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
$M_{\theta}$ P	n=0	0	-10285-1	-18773-1	-42735-1	-60007-1	-80399-1	-99498-1	
	n=2	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	-13227+1	-14886+1	-7235++0	-21403+0	-78447-1	-20660-1	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	+30230-3	+37591-3	+65528-3	+83529-3	+89020-3	+92957-3	$\times \cos 8\theta$

表 I-3 曲线附加断面力

 $f_0 = 0.600$ 

	n	0.600	0.650	0.700	0.800	1.00	1.50	2.00	
$B N_{\theta}$ P	n=2	-29950+1	-21737+1	-16157+1	-94720+0	-39130+0	-10152+0	-89772-1	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	+35816+0	+10823+0	+11536-1	-33108-1	-20471-1	-20235-2	+85199-3	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_{\theta}$ F	n=2	-10000+1	-12301+1	-13194+1	-13012+1	-10527+1	-56836+0	-34565+0	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	0	-10702-1	-49955-1	-10995+0	-13338+0	-83516-1	-52702-1	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_{\theta}$ P	n=2	-10000+1	-47431+0	-15049+0	+17527+0	+33194+0	+25266+0	+18228+0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	-94213-1	-10255+0	-64649-1	-10750-1	+82035-2	+48145-2	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
$B M_{\theta}$ P	n=0	0	-14605-1	-26995-1	-47048-1	-75658-1	-11893+0	-15025+0	
	n=2	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	-13992+0	-18633+0	-17923+0	-10548+0	-31135-1	-30626-1	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	+16122-3	+20678-3	+26514-3	+38634-3	+52130-3	+55265-3	$\times \cos 8\theta$

表 1-4 曲杆附壁断面力

 $\rho_0 = 0.800$ 

	$\rho$	0.800	0.850	0.900	1.000	1.300	1.800	2.500	
$N_{\theta}$ $P$	$n=2$	-30378+1	-23927+1	-19137+1	-12769+1	-51731+0	-31702+0	-48443+0	$\times \sin 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	$n=6$	-11697+0	-48815-1	-15180-1	+84763-2	+88579-2	+40251-2	+12783-2	$\times \sin 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$N_{r\theta}$ $P$	$n=2$	-10000+1	-11915+1	-12914+1	-13368+1	-10914+1	-68025+0	-38752+0	$\times \sin 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	$n=6$	0	+97491-3	+97054-2	+27644-1	+42311-1	+26668-1	+73919-2	$\times \sin 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$N_{re}$ $P$	$n=2$	-10000+1	-57705+0	-28215+0	+69470-1	+36944+0	+37383+0	+38634+0	$\times \cos 2\theta$
	$n=4$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	$n=6$	0	+26923-1	+33690-1	+27393-1	+29905-2	-65437-2	-75189-2	$\times \cos 6\theta$
	$n=8$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
$M_{r\theta}$ $P$	$n=0$	0	+13842-1	+25858-1	+45644-1	+83161-1	+10201+0	+40017-1	
	$n=2$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	$n=4$	0	+10065-1	+15372-1	+20609-1	+37684-1	+10794+0	+31385+0	$\times \cos 4\theta$
	$n=6$	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	$n=8$	0	-84546-4	-11561-3	-14490-3	-23218-3	-33769-3	-48370-3	$\times \cos 8\theta$

表 I-5 曲线附加断面力

 $\xi_0 = 1.000$ 

	$\rho$	1.000	1.200	1.500	1.700	2.000	2.500	3.000	
$B N_{\theta}$ P	n=2	-29929+1	-14634+1	-66401+0	-48126+0	-40847+0	-52815+0	-80382+0	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	+50925-1	+48776-4	-18187-2	+19050-3	+20443-2	+74709-3	-10119-1	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_{\theta}$ P	n=2	-10000+1	-13355+1	-11969+1	-10419+1	-83819+0	-60565+0	-46967+0	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	0	-94722-2	-20725-1	-22482-1	-23106-1	-24110-1	-24001-1	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_{\theta}$ P	n=2	-10000+1	-48927-1	+32763+0	+38539+0	+40695+0	+43608+0	+51695+0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	-14709-1	-70366-2	-49680-2	-46581-2	-50463-2	-89329-4	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
$B M_{\theta}$ P	n=0	0	-60806-1	-12071+0	-15173+0	-19601+0	-28956+0	-44751+0	
	n=2	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	-57822-1	-10189+0	-14448+0	-23611+0	-45577+0	-73883+1	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	+62884-4	+96109-4	+10933-3	+10044-3	+29411-5	-22674-3	$\times \cos 8\theta$



表 I-6 曲线附加断面力

 $\xi_0 = 1.300$ 

	$n$	1.300	1.350	1.400	1.600	2.000	2.500	3.000	
$B N_{\theta}$ P	n=2	-29998+1	-25934+1	-22594+1	-14113+1	-85972+0	-96623+0	-14577+1	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	-74392-1	-42567-1	-220336-1	+81113-2	+96676-2	+93696-4	-24870-1	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_y$ P	n=2	-10000+1	-11330+1	-12254+1	-13530+1	-11999+1	-94313+0	-76792+0	$\times \sin 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 4\theta$
	n=6	0	-57713-3	+16982-2	+15192-1	+21584-1	+11761-1	+55429-2	$\times \sin 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \sin 8\theta$
$B N_{\theta}$ P	n=2	-10000+1	-71877+0	-49288+0	+58148-1	+44762+0	+63746+0	+84214+0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	+12480-1	+18232-1	+15520-1	-15533-2	-68005-2	+51355-2	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 8\theta$
$B M_{\theta}$ P	n=0	0	-24694-1	-47343-1	-12296+0	-23996+0	-39812+0	-65347+0	
	n=2	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 2\theta$
	n=4	0	-72651-1	-13641+0	-35362+0	-81759+0	-16261+1	-27104+1	$\times \cos 4\theta$
	n=6	0	0	0	0	0	0	0	$\times \cos 6\theta$
	n=8	0	-19605-3	-30577-3	-45409-3	-61081-3	-93123-3	-15084-2	$\times \cos 8\theta$

## 第Ⅲ部 集中荷重を受ける曲面板に関する研究

### 第一章 集中荷重を受ける球殻

序

曲面板理論に関する著書は今世紀はじめより数多く出されているが集中荷重問題についての記述を含むものは最も簡単な曲面板である球殻においてすらほとんどない。集中荷重解は外力の特異性から釣合方程式の外力に対する特解として求まるものではなく、齊次解中より特異なまわりの解を外力に応じて抽出するという方法によるものではない。薄膜理論にもとづく一般解において 兩極点(頂点)における *singular action* の解を容易に見ることはできるが、<sup>1)</sup> これはあくまで力の釣合のみが外力の状態に適合するわけで、変形状態をも正しくあらわすものではない。曲げ理論にもとづくこの場合の解は集中荷重点近傍では偏平殻と見做せるとして この仮定のもとに集中荷重に対する特異解を示したものがあ<sup>2)</sup>る。しかし第Ⅰ部第一章で見たように薄膜解は曲げ理論にもとづく解の一部である。即ち薄膜理論にもとづく特異解に曲げ理論解の残りの特異解を加えることによって厳正に集中荷重に対する解を求めることが可能である。

球殻の曲げ理論解は前述の如くとり形自身に極点における特異解を含んでいる。従つてそれらがどのような外力に対するものかを知ればよい。

## §1 解について

第一部第一章において得られた解は全ての解を含む厳正なものである。静的状態 ( $\Omega^2 = 0$ ) の場合の解を書き下すと次の様になる。

応力函数表示より

$$n=0 \quad \psi = C_1^0 \cos \varphi + C_2^0 \left( -\frac{\cos \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} - 1 \right)$$

$$w = D_1^0 \cos \varphi + D_2^0 \left( -\frac{\cos \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} - 1 \right)$$

$$n=1 \quad \psi = \left\{ C_1^1 \sin \varphi + C_2^1 \left( \frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} + \cot \varphi \right) \right\} \cos \theta$$

$$w = \left\{ D_1^1 \sin \varphi + D_2^1 \left( \frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} + \cot \varphi \right) \right\} \cos \theta$$

$$n \geq 2 \quad \psi = \left\{ C_1^n (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + C_2^n (n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \cos n\theta$$

$$w = \left\{ D_1^n (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} + D_2^n (n - \cos \varphi) \cot^n \frac{\varphi}{2} \right\} \cos n\theta$$

応力函数表示以外より

$$n=1 \quad \lambda = -\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \, v) \operatorname{cosec} \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} u \operatorname{cosec} \varphi$$

$$= F_2^1 \left( \frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi} + \cot \varphi \right) \sin \theta$$

$$v = 0$$

で、これに加うるに曲げ解

$$\psi = \sum_{i=1}^2 (A_i P_{\mu_i}^n + E_i \lambda_{\mu_i}^n) \cos n\theta$$

$$w = \sum_{i=1}^2 v_i (A_i P_{\mu_i}^n + E_i \lambda_{\mu_i}^n) \cos n\theta$$

$$\text{ここに } \mu_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_i}, \quad \lambda_i = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda_i}$$

ここに 第一部第一章 参照。

である。ここに  $P_{\mu_i}^n(\cos \varphi)$  は  $\varphi = 0$  のとき  $\varphi = \pi$  の

値  $\lambda_i(\cos \varphi)$  はその連である。

この一般解から集中荷重解を取り出す。荷重解は曲げ

一般解の、厳正解の一部である故、薄膜状態で集中荷重解はそのまゝ集中荷重解と見做せる。

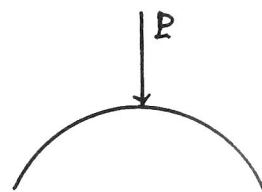
$n=0$  の場合

$C_i, D_i$  は剛体的移動の解であって不要となる。

釣合式、適合条件式より  $D_2 = \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{P}{Eka} C_2$ , どちらからいっても求める断面力は  $P$  を集中力として

$$N_\varphi = \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \quad N_\theta = -\frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

となる。(I) ところでこの場合  $\nu \rightarrow \infty$  ( $\varphi \rightarrow 0$ ) となり実状と合致しない。



$n=1$  の場合

同様に  $C_i, D_i$  は不要となり,  $C_2$  より

$$N_\varphi = -N_\theta = -\frac{H}{2\pi a} \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\sin^2 \varphi} \cos\theta$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{H}{2\pi a} \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\sin^2 \varphi} \sin\theta$$



なる断面力は得られ,  $D_2 = \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{H}{Eka} C_2$  の関係がある。H は水平力である。(II) この場合もやはり  $\nu \rightarrow \infty$  ( $\varphi \rightarrow 0$ ) となり実状に合致しない。

力の函数表示以外より求まる解は両柱にモーメントがかかった場合であり

$$N_\varphi = \frac{M}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 \varphi} \cos\theta, \quad N_{\varphi\theta} = \frac{M}{\pi a^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^3 \varphi} \sin\theta$$

$$N_\theta = -\frac{M}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 \varphi} \cos\theta$$



となる。(III) この場合  $\nu \rightarrow 0$  ( $\varphi \rightarrow \pi$ ) となり実状に合致する。

又,  $n=0$  の場合, カの釣合式より直接に

$$N_{0\varphi} = \frac{1}{2n^2\varphi}$$



が得られ, これは頂点で振った場合のカの釣合を満たす特異解である。(IV). この場合は  $w \rightarrow 0$  ( $\varphi \rightarrow 0$ ) となり実状に合う。

$n \geq 2$  の場合は両者共に Singular 解であるがその意味を調べることは容易ではない。

ところで上に示された如く, 薄膜解に含まれる集中荷重解は変形において実状と合致しなす場合がある。従って変形状態を合わせるために曲げの解が必要となるが,  $\varphi=0$  では第二種 Legendre 函数が  $\varphi=\pi$  では第一種のそれが意味をもつ。(3項参照)。これを用いて特異集  $\varphi=0$  或は  $\pi$  で変形が合うように未知係数を定めることになる。この場合荷重集近傍では面内カも曲げの解の影響を受けて、収束の断面カを表示しなすとはなす。

(1) の場合 (頂点に集中荷重)

$$w = D_2 \left( -\frac{10\varphi}{2} \log \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} - 1 \right) + c_1 B_1^0 \lambda_{\mu_1}(\cos\varphi) + c_2 B_2^0 \lambda_{\mu_2}(\cos\varphi) \quad (1)$$

において,  $\mu_1$  と  $\mu_2$  は複素因数の関係にある。従って

$$c_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad B_{1,2}^0 = \bar{B}_1^0 \pm i\bar{B}_2^0$$

$$\lambda_{\mu_1}(\cos\varphi) = \lambda + iY, \quad \lambda_{\mu_2}(\cos\varphi) = \lambda - iY$$

とおくと (1) 式は

$$w = D_2 \left( -\frac{10\varphi}{2} \log \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} - 1 \right) + 2 \left\{ \alpha (\bar{B}_1^0 \lambda - \bar{B}_2^0 Y) - \beta (X \bar{B}_2^0 + Y \bar{B}_1^0) \right\}$$

となる。ところで  $\cos \varphi = 1$  ( $\varphi = 0$ ) の極く近傍で  $\alpha_\mu$  を展開すると (§補I 参照)

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu - \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A \right\} \\ Y &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu - \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A \right\} \end{aligned}$$

とあらわすことが出来  $\operatorname{Re}\{\}, \operatorname{Im}\{\}$  の内は定数となる。

従って  $\varphi = 0$  で  $w$  が有限値  $w_0$  を有うるためには

$$\left. \begin{aligned} D_2^0 + 2\alpha \bar{B}_1^0 - 2\beta \bar{B}_2^0 &= 0 \\ -D_2^0 + 2\alpha \bar{B}_1^0 \mu - 2\alpha \bar{B}_2^0 \varepsilon - 2\beta \bar{B}_2^0 \rho - 2\beta \bar{B}_1^0 \varepsilon &= w_0 \end{aligned} \right\}$$

故に

$$\begin{aligned} \bar{B}_1^0 &= -\frac{\beta}{2\varepsilon} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [w_0 + D_2^0 (1 + \mu + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon)] \\ \bar{B}_2^0 &= -\frac{\alpha}{2\varepsilon} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [w_0 + D_2^0 (1 + \mu - \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \mu &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu - \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A \right\} \\ \varepsilon &= Y = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu - \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A \right\} \\ \alpha &\doteq -\frac{(1-\nu)^2}{E h a} \quad \beta \doteq -\frac{\sqrt{E}}{E h a} \quad \rho = \frac{12(1-\nu^2) a^2}{h^2} \end{aligned}$$

但し §補II 参照の事

かくて変形 (1) は  $\varphi = 0$  の近くには成る様にあらわすことが可能となった。

$$\begin{aligned} w &= D_2^0 \left( -\frac{\varepsilon}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi} - 1 \right) + (\alpha + i\beta)(\bar{B}_1^0 + i\bar{B}_2^0) \alpha_\mu(\cos \varphi) \\ &\quad + (\alpha - i\beta)(\bar{B}_1^0 - i\bar{B}_2^0) \alpha_\mu(\cos \varphi) \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

$D_2^0$  は力の釣合より決めることが出来る。

$$D_2^0 = \frac{1+\nu}{E h a} C_0 = \frac{1+\nu}{E h a} \cdot \frac{P a}{2\pi} \quad (3)$$

これより  $P$  が断面力 断面モーメントは第 I 部第一節

示される関係から容易に決める事が可能である。

(Ⅳ)の場合も(Ⅰ)と同様になり,  $\mu_1, \mu_2$  は同じく複素因数である故

$$B_1 = \bar{B}_1 + i\bar{B}_2, \quad B_2 = \bar{B}_1 - i\bar{B}_2$$

$$Q_{\mu_1}(\cos \varphi) = X + iY, \quad Q_{\mu_2}(\cos \varphi) = X - iY,$$

とおくと  $\varphi = 0$  の近傍では  $Q_{\mu}(\cos \varphi)$  は次のように展開される。(§補Ⅲ参照)

$$X = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1-\cos \varphi) \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} - \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1-\cos \varphi) \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu_1 \right. \\ \left. - \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1+\cos \varphi) \frac{i\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\}$$

$$i = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1-\cos \varphi) \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} - \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1-\cos \varphi) \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu_1 \right. \\ \left. - \frac{1+\mu_1}{2\sin \varphi} (1+\cos \varphi) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\}$$

同様に  $X, i$  を用いて

$$W_1 = D_2' \left\{ -\frac{\sin \varphi}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu_1 \right\} + 2 \left\{ \alpha (\bar{B}_1' X - \bar{B}_2' Y) - \beta (\bar{B}_2' X + \bar{B}_1' Y) \right\}$$

とすると  $(1-\cos \varphi)/2\sin \varphi$  と  $2\sin \varphi$  とは同じ order の値である。

従って  $\varphi = 0$  で  $W$  が有限になるためには

$$-D_2' + 2\alpha \left\{ \bar{B}_1' \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} - \bar{B}_2' \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} \right\} \\ - 2\beta \left\{ \bar{B}_2' \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} + \bar{B}_1' \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} \right\} = 0$$

$$D_2' - 2\alpha \left\{ \bar{B}_1' \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} - \bar{B}_2' \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} \right\} \\ + 2\beta \left\{ \bar{B}_2' \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} + \bar{B}_1' \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} \right\} = 0$$

とすると  $\operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} \div \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2\sin \pi \mu_1} A \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu}$  (§補Ⅲ参照) である。

従って

$$\bar{B}_1' = \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} (R + \frac{\sqrt{\mu}}{2}) \right\} / 2 \left\{ R(\alpha + \beta) + \sqrt{\mu}(\alpha - \beta) \right\} \times D_2'$$

$$\bar{B}_2' = \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\frac{\sqrt{\mu}}{2} R - \sqrt{\mu}) \right\} / 2 \left\{ R(\alpha - \beta) - \sqrt{\mu}(\alpha + \beta) \right\} \times D_2'$$

ここに

$$R = \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu_1} A \right\} \quad X = \operatorname{Im} \left\{ (1+\mu_1) \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu_1} A \right\}$$

$$Y = \operatorname{Re} \left\{ (1+\mu_1) \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{k}, \quad \alpha \doteq -\frac{1-\nu^2}{E h a}, \quad \beta \doteq -\frac{\sqrt{k}}{E h a}, \quad k = \frac{12(1-\nu^2) q^2}{h^2}$$

かくて変形  $w$  は  $\varphi = 0$  の近傍で次の様にあるゆえである。

$$w = \left\{ D_2' \left( -\frac{2 \sin \varphi}{2} \log \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \omega \varphi \right) + (\alpha + i\beta) (B_1' + i B_2') (1 + \mu_1) \cot \varphi Q_{\mu_1} - \frac{1}{2 \sin \varphi} \alpha \mu_1 + 1 \right\} + (\alpha - i\beta) (\bar{B}_1' - i \bar{B}_2') (1 + \mu_2) \cot \varphi \alpha \mu_2 - \frac{1}{2 \sin \varphi} \times \\ \times Q_{\mu_2 + 1} \left. \right\} \cos \theta \quad \text{-----} \quad (4)$$

$D_2'$  は力の釣合から決定され得る。

$$D_2' = \frac{1+\nu}{E h a} \cdot C_2 = \frac{1+\nu}{E h a} \cdot \frac{H a}{2\pi} \quad (5)$$

かくて球殻の基本的な特異解は求まった。

曲げ解部分は減衰が早い局所的なものでしてこの解は偏平球殻のものをを用いると解は Modified Bessel 函数  $ker$ ,  $kei$  及び  $bei$  等によってあらわすことが出来、変形は容易にあらわせる。この法は既に W. Flugge<sup>[1]</sup> の著書に記載されている。荷重は近傍を考へるとき偏平球殻の解を用いても充分正確と思われ得る。

### § 補 I

第一種 Legendre 函数を  $z = -1$  の近傍で展開すると

$$P_\nu(z) = \left( A + B \log \frac{1+z}{2} \right) F(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1+z}{2}) + B F_1(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1+z}{2})^{[2]}$$



ここに  $B = (\sin \pi \nu) / \pi$  ( $\nu$  は整数)

$$A = \psi(\nu+1) + \psi(-\nu) + C$$

$\psi(x)$ ; Gauss の  $\psi$  函数

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \Gamma(x),$$

$$C; = 0.57721566 + \gamma \quad (\text{Euler 常数})$$

$z=1$  で特異点をとるような第一種 Legendre 函数は

$$Q_\nu(z) = \pi \frac{\cos \nu \pi P_\nu(z) - P_\nu(-z)}{2 \sin \nu \pi}$$

ここに  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$   $F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$  は超幾何級数であって

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)}{(k!)^2} z^k$$

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)}{(k!)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{1}{\alpha+r} + \frac{1}{\beta+r} \right) - \sum_{r=1}^k \frac{2}{r} \right\} z^k$$

従って  $\nu$  の値にかかわらず,  $P_\nu(z)$  は  $z=-1$  で対数的特異点を有し, 同様に  $Q_\nu(z)$  は  $z=1$  で対数的特異点を有する。

(即ち実部 虚部共に対数的特異値をとる。) 従って

$$\lim_{z \rightarrow -1} F(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1+z}{2}) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} F_1(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1+z}{2}) = 0$$

であって,  $z \rightarrow -1$  又  $z \rightarrow 1$  での  $P_\nu(z)$  及び  $Q_\nu(z)$  は各各次の如くあらわされる。

$$P_\nu(z) = (A + B \log \frac{1+z}{2})$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \left\{ \cos \pi \nu - (A + B \log \frac{1-z}{2}) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cot \pi \nu - \left( \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} A + \frac{1}{2} \log \frac{1-z}{2} \right)$$

$$(\because P_\nu(1) = 1)$$

又,  $\alpha + i\beta$  のとき

$$\sin(\alpha + i\beta) = \sin \alpha \cosh \beta + i \cos \alpha \sinh \beta$$

$$\cos(\alpha + i\beta) = \cos \alpha \cosh \beta - i \sin \alpha \sinh \beta$$

A は又, 書き換えると

$$A = -\pi \cot \pi \mu + C$$

とあらわすことが可能である。

### § 補 II

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_1}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_1}, \quad \lambda_1 \div \sqrt{k} i$$

従って

$$\begin{aligned} \mu_2 &\div -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{k}} \pm i\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{k}} \\ &\div \frac{1}{2}\sqrt{k} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k} i \end{aligned}$$

### § 補 III

$$P'_\mu(\cos \varphi) = \left\{ \cot \varphi P_\mu(\cos \varphi) - \frac{1}{\sin \varphi} P_{\mu+1}(\cos \varphi) \right\} (1+\mu)$$

$$Q'_\mu(\cos \varphi) = \left\{ \cot \varphi Q_\mu(\cos \varphi) - \frac{1}{\sin \varphi} Q_{\mu+1}(\cos \varphi) \right\} (1+\mu)$$

従って  $\varphi=0$  の極く近傍では

$$P'_\mu(\cos \varphi) = \left\{ \left( A + B \log \frac{1+\cos \varphi}{2} \right) \cot \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \left( A - B \log \frac{1+\cos \varphi}{2} \right) \right\} (1+\mu)$$

$$\begin{aligned} Q'_\mu(\cos \varphi) = & \left[ \frac{1}{2} \pi \cot \pi \mu - \left( \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A + \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} \right) \cot \varphi \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sin \varphi} \left\{ \frac{\pi}{2} \cot \pi \mu + \left( \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} A - \frac{1}{2} \log \frac{1-\cos \varphi}{2} \right) \right\} \right] (1+\mu) \end{aligned}$$

となる。

## 第二章 集中荷重を受ける円筒殻

## 序

円筒殻はその形態上、実用的に最も多く用いられる殻  
ごちり、従って集中荷重を受けることが多いが、その  
ための優れた研究は少ない。多くの試みはなされている  
が集中荷重に対する適切な表示はほとんどみられない。

扁平殻の仮定のもとに *thermal singularity* に関して  
ber bei 函数を用いた解が 1958 年 W. Flügge と D. A. Conrad  
によって与えられた<sup>(1)</sup>がこの方面の研究の初期と思われ  
る。この後同じく扁平なものについて *force singularities*  
が円筒函数と指数函数の積の積る形で A. Jahanshahi<sup>(2)</sup>  
によって与えられたがその解を等しく過程が全く不明  
であり、彼の論文ではその函数を釣合式に代入すれば式  
が満たれることが述べられているのみであり、且つこの  
解は要素平面での積る表示であって実用上の計算は不可  
能に近い。従って彼は原点の近傍では  $w$  と  $\phi$  は次のよう  
に近似になることを示している。

$$w = \frac{P}{8\pi D} r^2 \log r, \quad \phi = -\frac{aP^2}{12\pi} \left( \frac{r^4}{4} \log r + r^2 r^2 \log r \right)$$

これは  $w$  に関して板の場合と同じであり 円筒として  
の特性はあらわれていない。この後縁は無限遠方に境界  
をもつ閉じた円筒殻の集中荷重に対する解を Green 函数  
を用いてあらわすことに成功した。<sup>(3)</sup> しかしこの函数は  
結局には要素変数の第 2 種 Hankel 函数であらわせる  
ことになり計算は容易ではない。

ところで第Ⅱ部第二章で示した解には原点における特異解を含んでいる。したがってこの解の中には原点での(1)筒の側壁にある) *singular actions* の解は主を占められているはずである。ここではこれについて論じる。

尚ここに与えられる集中荷重(法線方向)に対する解は近似解である。

## §1. 集中荷重に対する近似解

第Ⅱ部第一章に与えられたところによると特異解は厳正には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_n}{A} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_n^k \cos \frac{k\pi}{2} + D_n^k \sin \frac{k\pi}{2} \right\} \frac{1}{\xi^{2k}} + D_0^* \log \xi \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} \{ E_n^p X_{n,p}(\xi) - F_n^p Y_{n,p}(\xi) \} \\ \phi_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -C_n^k \sin \frac{k\pi}{2} + D_n^k \cos \frac{k\pi}{2} \right\} \frac{1}{\xi^{2k}} + D_0^* \log \xi \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} \{ E_n^p Y_{n,p}(\xi) + F_n^p X_{n,p}(\xi) \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ここに } \operatorname{Re}[S^p H_{2n-p}^{(V)}(S)] = X_{n,p}(\xi) \quad \operatorname{Im}[S^p H_{2n-p}^{(V)}(S)] = Y_{n,p}(\xi)$$

$$S = \sqrt{z} \xi = k \sqrt{z} \xi$$

ところで集中荷重の+の解を抽出することにする。この場合に及ぼす一次導函数は原点で連続でなければならぬ。従って  $C_n^k, D_n^k$  を含む項は消えねばならぬ。ここでは零とあって不都合は生じない。又原点に於ける集中荷重(法線方向)を  $P$  とすると

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \alpha_p^* f d\theta = \text{const.} = P \quad (2)$$

でなければならぬ。この事より  $n=0$  の未知数が意味を有することがわかる。

建築物の屋根として用いられる円筒殻を対象とするとかなり扁平な殻と見做すことが出来る。すると荷重が近傍では  $P^2$  に対して  $\mu R$  の方がかなり大きいと見做すことが出来、従って  $n=0$  の項は  $n$  の値についてあまり遠くまで影響をおよぼさぬとして近似的に  $n=0$  の項のみをとっても充分であると考へられる。ところで集中荷重に対しては  $n=0$  の係数は定数であり  $E_0^p, F_0^p$  は他の荷重

状態に対して意味をもつものであることが容易にわかる  
故ここでは零とする。(  $E_0^0, F_0^0$  は何の値であってもよいが  
わかればその一次導函数が原点で零であることより零の  
値をとった。) 又, (2) より  $F_0^0$  は regular の挙動をすること  
がわかる故  $F_0^0 = 0$  とし得る。従って未知数は  $E_0^0$  のみとな  
る。係数間の関係は  $n=0, 1 \quad p=0 \sim 4$  として次のようにな  
る。

$$\left. \begin{aligned} E_0^0 &= 0, \quad E_0^1 = \frac{1}{32} E_0^0, \quad E_0^2 = -\frac{1}{6 \times 32} E_0^0, \quad E_0^3 = -\frac{1}{32 \times 6 \times 12} E_0^0 \\ E_1^0 &= 0, \quad E_1^1 = -\frac{1}{4} E_0^0, \quad E_1^2 = 0, \quad E_1^3 = -\frac{1}{32 \times 12} E_0^0, \quad E_1^4 = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

$E_1^4$  は非常に小さい値である故 無視することにする。

(2) より  $z$  を  $w$  の方向にとって

$$\begin{aligned} -P &= -\frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \int_0^{2\pi R} \left[ (2Y_{0,1} - \xi^2 X_{0,1}) E_0^0 + \dots \right] \frac{\xi}{R} d\theta \Big|_{\xi \rightarrow 0} \\ &= \frac{4t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left( \xi \cdot 0 - \xi^3 \right) \Big|_{\xi \rightarrow 0} E_0^0 = -\frac{4t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} E_0^0 \end{aligned}$$

$$\therefore E_0^0 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{4t} P \quad \text{-----} \quad (4)$$

断面力 断面モーメントは次のようにあらわせる。

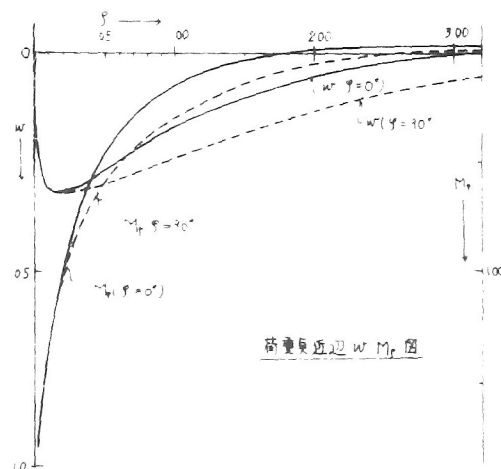
$$\left. \begin{aligned} W_0 &= E_0^0 X_{0,0} + E_0^2 X_{0,2} + E_0^3 X_{0,3} \\ W_1 &= E_1^1 X_{1,1} + E_1^3 X_{1,3} \\ N_{r,0} &= -\lambda_{0,1} E_0^0 - X_{0,1} E_0^2 - X_{0,2} E_0^3 \\ N_{t,1} &= \left( -\frac{4}{\xi^2} Y_{1,1} - \lambda_{1,0} \right) E_1^1 + \left( -\frac{2}{\xi^2} Y_{1,3} - \lambda_{1,2} \right) E_1^3 \\ N_{r,1} &= 2 \left( 2 \frac{1}{\xi^2} Y_{1,1} - \lambda_{1,0} \right) E_1^1 + 2 \left( 3 \frac{1}{\xi^2} Y_{1,3} - \lambda_{1,2} \right) E_1^3 \\ N_{\theta,0} &= (\lambda_{0,1} - X_{0,0}) E_1^1 + (-3 X_{0,1} - X_{0,2}) E_0^2 + (-5 X_{0,2} - X_{0,3}) E_0^3 \\ N_{\theta,1} &= (-\lambda_{1,0} - \lambda_{1,1} + \frac{2}{\xi^2} Y_{1,1}) E_1^1 + (-5 X_{1,2} - \lambda_{1,3} + \frac{2}{\xi^2} Y_{1,3}) E_1^3 \\ M_{r,0} &= -\frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \left\{ Y_{0,0} - (1-\nu) Y_{0,-1} \right\} E_0^0 + Y_{0,2} + (3+\nu) Y_{0,1} \right] E_0^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ Y_{0,3} + (5+\nu) Y_{0,2} \} E_0^3 ] \\
M_{\varphi,1} &= - \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(1-\nu) X_{1,1} + Y_{1,1} + (1+\nu) Y_{1,0} \right\} E_1^1 \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(1-\nu) X_{1,3} + Y_{1,3} + (5+\nu) Y_{1,2} \right\} E_1^3 \right] \\
M_{\varphi,1} &= \frac{(1-\nu)t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left\{ \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} X_{1,1} - 2 Y_{1,0} \right) E_1^1 + \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} X_{1,3} - 2 Y_{1,2} \right) E_1^3 \right\} \\
M_{\varphi,0} &= \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \left\{ \nu Y_{0,0} + (1-\nu) Y_{0,1} \right\} E_0^2 + \left\{ \nu Y_{0,2} + (1+3\nu) Y_{0,1} \right\} E_0^2 \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \nu Y_{0,3} + (1+5\nu) Y_{0,2} \right\} E_0^3 \right] \\
M_{\varphi,1} &= \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(\nu-1) X_{1,1} + \nu Y_{1,1} + (1+\nu) Y_{1,0} \right\} E_1^1 + \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(\nu-1) X_{1,3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nu Y_{1,3} + (1+5\nu) Y_{1,2} \right\} E_1^3 \right]
\end{aligned}$$

ここに  $X_{i,j}$   $Y_{i,j}$  は 補 参 照 の 事。

計算結果を図および表  
に示す。

この結果より円筒殻に  
おける厚さ 半径の影響  
がわかるが 直接係数に  
半径の影響の入って来な  
い事は注目されてよい。  
また、直断面力は荷重負  
で  $\infty$  となる。



断面モーメント  $M_{\varphi}$  の急  
激に減少していくこと、 $\varphi = 0^\circ$   $90^\circ$  の二方面における差  
の小さいことなどわかる。変位  $w$  は  $\varphi = 0^\circ$   $90^\circ$  の二方向  
において差が出る。 $\varphi = 90^\circ$  の方がゆるやかな減りであ  
る。

表 同筒集重時發力

$\times \frac{2}{\pi}$

	0	0.10	0.20	0.30	0.50	0.70	1.00	2.00	3.00
$w_0$	0	0.49465	0.48303	0.46741	0.42961	0.38720	0.32222	0.14655	0.04907
$w_1$	0	-0.00230	-0.00703	-0.01295	-0.02614	-0.03902	-0.05493	-0.06855	-0.04491
$N_{p0}$	$-\infty$	-63.4134	-15.6688	-6.83099	-2.31373	-1.07214	-0.43563	-0.26731	0.00861
$N_{p1}$	$-\infty$	-63.5371	-15.7909	-6.94948	-2.42392	-1.17931	-0.52167	-0.06632	0.00622
$N_{p1}$	$\infty$	31.4597	7.59448	3.18416	0.94711	0.35327	0.06799	-0.04277	-0.00413
$N_{q0}$	$\infty$	62.9196	15.8987	6.36993	1.89664	0.70939	0.13840	-0.09288	-0.04433
$N_{q1}$	$\alpha (\frac{1}{2} \pi)$	-0.12109	-0.11320	-0.10248	-0.07842	-0.05371	-0.02030	0.03642	0.04440
$-\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{t} M_{p0}$	$-\infty$	-2.16906	-1.57844	-1.23830	-0.82483	-0.57154	-0.33404	-0.03285	0.03828
$-\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{t} M_{p1}$	$-\infty$	-0.06123	0.01547	0.05336	0.09564	0.11329	0.11637	0.05984	0.00940
$-\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{t} M_{q1}$	$\infty$	0.31877	0.19372	0.13163	0.05786	0.01488	-0.01412	-0.04626	-0.02936
$-\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{t} M_{q0}$	$\infty$	0.21073	0.18777	0.17342	0.15284	0.13629	0.11437	0.05627	0.02847
$-\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{t} M_{q1}$	$\infty$	0.47371	0.39561	0.34900	0.28781	0.24460	0.19468	0.08579	0.03185



§ 補 函数間の関係について

$$H_0^{(1)}(z) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ker} z - i \frac{2}{\pi} \operatorname{ker}' z$$

$$H_1^{(1)}(z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{2}{\pi} (\operatorname{ker}' z - i \operatorname{ker} z)$$

とこで

$$\operatorname{ker} z = 1 - \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

$$\operatorname{ker}' z = \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{z^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots$$

$$\operatorname{ker} z = -(\nu + \log \frac{z}{2}) \operatorname{ker} z + \frac{\pi}{4} \operatorname{ker}' z - (1 + \frac{1}{2}) \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots$$

$$\operatorname{ker}' z = -(\nu + \log \frac{z}{2}) \operatorname{ker}' z - \frac{\pi}{4} \operatorname{ker} z + \frac{z^2}{2^2} - \dots$$

$$\operatorname{ker}' z = \frac{d}{dz} \operatorname{ker} z, \quad \operatorname{ker} z = \frac{d}{dz} \operatorname{ker}' z$$

$$X_{0,1}(z) = -\frac{2}{\pi z} (\operatorname{ker}' z), \quad Y_{0,1} = \frac{2}{\pi z} \operatorname{ker}' z$$

$$X_{0,0}(z) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ker} z, \quad Y_{0,0} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ker} z$$

$$X_{0,1}(z) = -\frac{2}{\pi} z \operatorname{ker}' z, \quad Y_{0,1} = -\frac{2}{\pi} z \operatorname{ker}' z$$

$$X_{0,2}(z) = \frac{2}{\pi} z (2 \operatorname{ker}' z - z \operatorname{ker} z)$$

$$Y_{0,2}(z) = \frac{2}{\pi} z (2 \operatorname{ker}' z + z \operatorname{ker} z)$$

$$X_{0,3}(z) = -\frac{2}{\pi} (8z \operatorname{ker}' z + z^3 \operatorname{ker}' z - 4z^2 \operatorname{ker} z)$$

$$Y_{0,3}(z) = -\frac{2}{\pi} (8z \operatorname{ker}' z - z^3 \operatorname{ker}' z + 4z^2 \operatorname{ker} z)$$

$$X_{1,0}(z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{z} (2 \operatorname{ker}' z + z \operatorname{ker} z)$$

$$Y_{1,0}(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{z} (2 \operatorname{ker}' z - z \operatorname{ker} z)$$

$$X_{1,1}(z) = \frac{2}{\pi} z \operatorname{ker}' z$$

$$Y_{1,1}(z) = \frac{2}{\pi} z \operatorname{ker}' z$$

$$X_{1,2}(z) = \frac{2}{\pi} z^2 \operatorname{ker} z$$

$$Y_{1,2}(z) = -\frac{2}{\pi} z^2 \operatorname{ker} z$$

$$X_{1,3}(z) = \frac{2}{\pi} z^3 \operatorname{ker}' z$$

$$Y_{1,3}(z) = -\frac{2}{\pi} z^3 \operatorname{ker}' z$$

## 第三章 集中荷重を受ける H.P. 殻

## 序

既に明らかにしたように球 (円筒) 殻では集中荷重を受ける場合の研究はなされてゐるが H.P. 殻としてこの問題を取りあげ成功したものはまだ内外に見当らな。しかし H.P. 殻においてもこの問題は重要であり、又フーズ (Foote) 著などとの関係から平板と比較において H.P. 殻の特性を知ろうとする場合の重要な視角の一つとなり得る。従つてこの問題も早急に解明されねばならぬもの一つである。

H.P. 殻では球や円筒の如くそれ自身特異性を有してゐるから特殊函数で解をあらわすことはできな。平板の場合と同様に H.P. 殻を柱座標であらわしてその原点での特異性を調べることになる。しかしこの場合第 II 部第三章で見た如く通常の手法では上変数の変数分離が不可能になるので容易には原点での特異解を求めることができない。ところで H.P. 殻は平板に无振りが与えられたものがある。従つて既知である平板の特異解より出発してフーズに関して擾動法 (perturbation method) を適用して望む H.P. 殻の特異解を求める手法が考えられるが W. Flügge によるとこの手法では H.P. 殻では収斂する望ましい特異解が得られなとの事である。もし直接に特異解を求めることができれば一番望ましい。

筆者は第 II 部第三章で得た一般解に原点まわりの特異

解が含まれている事に着目し、この中から垂直方向集中荷重に対する特異解をとり出し H.P. 殻の特異解を樹立することに成功した。集中荷重に対する特異解が得られると、より高次の集中外力に対する特異解はこの高次導函数から得られる。得られた集中荷重に対する特異解は非常に収斂性のよいものだから、その解の形をよび数値計算結果からライズ 厚さの影響が明確に論じられる。

用いられる記号

$h$ : 厚さ

$k$ :  $k = \sqrt{12(1-\nu^2)}/h$

$C$ :  $C = xy/z$

$\rho$ : 原点からの距離で無次元化された量  $\rho = \sqrt{\frac{12}{h}} r$

$A$ :  $A = Eh^2 / \sqrt{12(1-\nu^2)}$

## §1. 解法と解

極座標を用いて H.P. 殻の釣合式 適合条件式をあらわす。すると第Ⅱ部第三章の (1-1), (2-4) をそのまま用いることが出来る。垂直変位が原矢に対して対称であることより、次の展開のみが必要である。

$$w = w_0 + \sum w_n \cos n\theta \quad \phi = \sum \phi_n \sin n\theta$$

従って多くの種類の特異解を含んだ一般解は次の形であらわされる。

$$\begin{aligned} \psi_n = & \sum_{p=0}^{\infty} A_n^p f^{n+4p} + \sum_{p=0}^{n_1-1} B_n^p f^{-n+4p} + \sum_{p=n_1}^{\infty} K_n^p f^{-n+4p} \log f \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} C_n^p f^{n+2+4p} + \sum_{p=0}^{n_2-1} D_n^p f^{-n+2+4p} + \sum_{p=n_2}^{\infty} L_n^p f^{-n+2+4p} \log f \quad \dots (1) \end{aligned}$$

ここに  $\psi_n = \phi_n + A w_n$ ,  $\psi_0 = A w_0$ ,  $\psi_{-2} = A w_{-2}$  である。

$\bar{\psi}_n = \phi_n - A w_n$  とおいても全く同様にあらわすことが出来る。ところで  $w$  に関する特異解についていえば  $f^{-n}$  を含む項は垂直集中荷重に対するものではなくて他の特異解であることを平板の場合から類推して知っている。従って (1) よりこのような項を消去することを考えると  $\theta$  の値に関係せず消えるためには未知積分常数は次の値をとらねばならない。

$$\bar{B}_n^0 = \bar{D}_n^0 = \bar{C}_n^0 = \bar{L}_n^0 = 0 \quad (\text{尚記号は第Ⅱ部第三章参照})$$

(1) において  $f^k$  の項は regular であり、又  $f^k \log f$  ( $k \geq 4$ ) の項は  $w$  の 4 階微分までは少なくとも regular である。従って今考えている問題に関する  $w$  の特異解としては唯、 $\log f$ ,  $f^2 \log f$  の 2 項のみを考慮すればよいことになる。

$w$  中に含まれる  $\log f$ ,  $f^2 \log f$  の項に含まれる未知積分

常数は次のようになる。

$$\log f(\bar{K}_0)$$

$$f^2 \log f(\bar{L}_0 + \bar{K}_2 \cos 2\theta)$$

今の荷重状態においては  $w$  は原点  $f=0$  で連続(従って有限)しなければならないという条件より  $\bar{K}_0=0$  でなければならない。他方全ての直断面力は同様に  $f=0$  で連続しなければならない。即ち中とちう第二導函数は  $f=0$  で連続函数でなければならない。中における次の項

$$f^2 \log f(\bar{K}_2 \sin 2\theta)$$

をみると  $\bar{K}_0$  が零であるため  $\bar{K}_2=0$  (注: 第II部第III章参照) となりこの項は消えることが容易にわかる。故に中の形より全ての直断面力は *regular* となる。

中とちより次の事がわかる。中に含まれる  $\bar{A}_n, \bar{C}_n$  ( $n=0, 2, 4, \dots$ ) は唯 *regular* な量のみに関係しており、これらに述べて求まる  $\bar{u}_n, \bar{c}_n$  は同様に唯 *regular* な直断面力の和を与える。

ところで今我々は載荷具近傍のみを考慮しているわけであるから、このような *regular* な項はどのような値をとってもよい故それらが消えるように未知常数を決め得る。ここではそれらを零と仮定し得る。従って  $\bar{K}_0=0$  をも用いて、

$$\bar{A}_n^p = \bar{u}_n^p = 0 \quad \bar{K}_n^p = \bar{K}_1^p = 0 \quad \bar{C}_n^p = \bar{c}_n^p = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

従ってこの問題に対する特異解は次のようになる。

$$A_{II} = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \bar{C}_0^p f^{2+4p} + \bar{L}_0^p f^{2+4p} \log f \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \bar{C}_n^p f^{n+2+4p} + \right.$$

$$+ \bar{L}_n^p f^{-n+2+4p} \log f \} \cos n\theta$$

$$\phi = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \{ \bar{C}_n^p f^{n+2+4p} + \bar{L}_n^p f^{-n+2+4p} \log f \} \sin n\theta \quad (2)$$

(2) 式の収斂性を証明することは非常に困難であるが、係数間の関係を数値的に示すことによって工学的にこれが充たれていることを示す。

$n=0 \sim 8$ ,  $p=0 \sim 4$  に対して係数間の関係は次のようになる。

$$\bar{C}_0^1 = s_1 \bar{L}_0, \quad \bar{C}_0^2 = -s_2 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_0^1 = -s_3 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_0^2 = s_4 \bar{L}_0.$$

$$\bar{C}_2^1 = s_5 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_2^1 = s_6 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_2^2 = -s_7 \bar{L}_0.$$

$$\bar{C}_4^1 = s_8 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_4^1 = s_9 \bar{L}_0, \quad \bar{L}_4^2 = -s_{10} \bar{L}_0.$$

$$\bar{L}_6^3 = s_{11} \bar{L}_0, \quad \bar{L}_8^4 = s_{12} \bar{L}_0.$$

ここに

$$s_1 = +18084-3, \quad s_2 = +23448-7, \quad s_3 = +43402-3, \quad s_4 = +33408-7$$

$$s_5 = +28123-5, \quad s_6 = +20833-1, \quad s_7 = +54253-5, \quad s_8 = +18741-7$$

$$s_9 = +13020-3, \quad s_{10} = +24220-7, \quad s_{11} = +38752-6, \quad s_{12} = +67277-7$$

但し  $+0.1 \times 10^{-n} = +1-n$  とする。(但し  $0.0325 = +325-1$ )

上述以外の係数は全て零である。上述の係数には唯一つの未知定数  $\bar{L}_0$  が含まれている。そしてこれは次のように決めることが出来る。

$$P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} D \cdot \frac{\partial W}{\partial r} \bigg|_{r=\epsilon} \epsilon d\theta \quad r = \sqrt{\frac{c}{k}} \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{従って} \quad \bar{L}_0 = \frac{P \cdot A}{8\pi D} \cdot \frac{c}{k} \quad \text{--- (4)}$$

$$A = E n^2 \sqrt{1-\nu^2} \quad c = x y / z \quad k = \sqrt{1-\nu^2} / R$$

半径(荷重点)の近くでの断面力 断面モーメント, 変位

を表及図に示す。

数値結果から観察されると  
この歪力擾乱におけるラ  
イズや厚さの影響の主たる様相  
は次の如くである。

全断面力に含まれる係数  
 $D_R \bar{L}_0$  は結局  $P/8\pi$  となり  
この係数にはライズ要素は全  
く含まれないことになる。し  
かし厚さは  $\bar{L}$  の中に含まれ

ており 従って厚さはこの係数によつて断面力に影響を  
与える。即ちライズの影響は唯原点からの距離  $\rho$  に含ま  
れるのみであるが 厚さは  $\rho$  にも係数にも含まれる。  
ところで  $\rho$  中におけるライズ要素  $c$  と厚さは同じ  
order で共存する。  $\rho$  が増加すると全ての直断面力は  
大きくなるがしかし  $c$  によつては変化しない。曲げモー  
メントに対しては  $\rho$  に従う局地性の傾向は上述と同様で  
あるが、共通の係数

$$D_R \bar{L}_0 / cA = P/8\pi$$

には  $\bar{L}$  の影響は存在しない。次に注目するとこの係数

$$\bar{L}_0/A = (P/8\pi) \cdot \sqrt{12(1-\nu)} \cdot c/E\bar{L}^2$$

により次の様に与える。厚さ一定で  $c$  が小さくなると(  
ライズが増す)  $\bar{L}$  の局地性の傾向は強くなり どの値は  
小さくなる。逆の場合は逆になる。  $c$  が一定で  $\bar{L}$  が小さ  
くなると  $\bar{L}$  の局地性の傾向は強くなり 又  $\bar{L}$  の値も非常

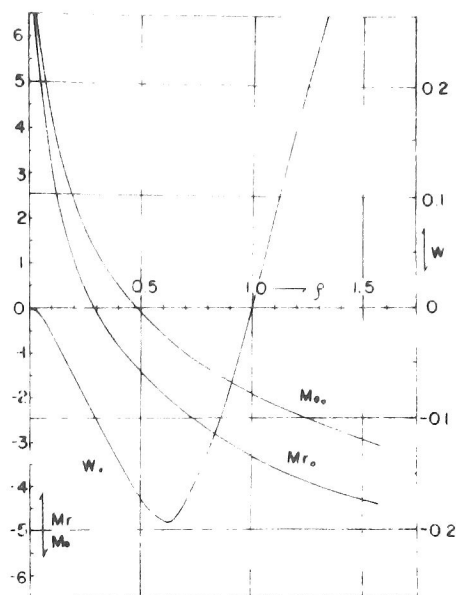


表									
$\rho$	0	$L_0 = P_0/8\pi$ 0.1	$L_1 = P_1/8\pi$ 0.2	$L_2 = P_2/8\pi$ 0.3	0.5	0.7	1.0	1.5	
$Aw_0/L_0$	0	-23026-1	-64377-1	-10836-0	-17329-0	-17473-0	+10808-3	+91235-0	
$Aw_4/L_0$	0	-29980-9	-13411-7	-11427-6	-14100-5	-54619-5	+18741-7	+60185-3	$\times \cos 4\theta$
$Aw_8/L_0$	0	-15492-18	-11088-15	-47831-14	-45541-12	-67784-11	0	+17478-7	$\times \cos 8\theta$
$N_{q2}/L_1$	0	-42978-2	-10261-1	-13964-1	-68590-2	+27788-1	+14591-0	+55614-0	$\times \sin 2\theta$
$N_{q6}/L_1$	0	-44156-10	-18633-8	-14809-7	-14421-6	-22675-6	+58126-5	+13878-3	$\times \sin 6\theta$
$N_{r2}/L_1$	0	+20833-3	+83332-3	+18750-2	+52086-2	+12082-1	+20839-1	+46841-1	$\times \sin 2\theta$
$N_{r6}/L_1$	0	+25372-10	+11425-8	+98096-8	+12357-6	+50069-6	+38752-6	-45699-4	$\times \sin 6\theta$
$N_{r12}/L_1$	0	-17231-2	-44663-2	-69372-2	-70697-2	-99379-3	+25033-1	+14564-0	$\times \cos 2\theta$
$N_{r18}/L_1$	0	-35152-10	-15277-8	-12590-7	-13995-6	-40942-6	+23251-5	+10166-3	$\times \cos 6\theta$
$M_{y0}/L_2$	$\infty$	+40867+1	+22845+1	+12303+1	-98135-1	-97342-0	-19008+1	-29451+1	
$M_{y4}/L_2$	0	+53967-6	+58912-5	+21699-4	+88451-4	+13984-3	-29996-3	-44234-2	$\times \cos 4\theta$
$M_{y8}/L_2$	0	+12232-14	+12416-12	+40971-11	+13519-9	+93803-9	-31621-8	-64735-6	$\times \cos 8\theta$
$M_{r0}/L_2$	$\infty$	+26867+1	+88452-0	-16982-0	-14985+1	-23740+1	-33008+0	-43518+0	
$M_{r4}/L_2$	0	+91042-6	+88352-5	+30616-4	+99060-4	+33282-4	-13944-2	-86312-2	$\times \cos 4\theta$
$M_{r8}/L_2$	0	+15194-14	+23447-12	+48178-11	+14428-9	+74325-9	-10765-7	-10649-5	$\times \cos 8\theta$
$M_{r12}/L_2$	0	-38326-6	-41106-5	-14823-4	-56182-4	-68531-4	+36496-3	+55912-2	$\times \sin 4\theta$
$M_{r18}/L_2$	0	-74310-15	-12992-12	-24313-11	-77094-10	-48001-9	+37606-8	+44893-6	$\times \sin 8\theta$

$$0.1 \times 10^n = 1 + n \quad (134 + 325 - 1 = 0.325 \times 10^{-1})$$



に大きくなる。この異相と厚さの影響の仕方には大きな差がある。

$f$ が増加すると断面力も変位も急速に増加するが、これは外側の境界条件を考慮していないためである。

$w$ のみならず曲げモーメントにおいても  $n=0$  に関する項は原異の近傍では  $n \geq 2$  の項に比較して極端に大きい。従ってアーチ方向、釣り方向における諸量の相違は非常に小さく、実用上は  $\theta$  方向展開の初項のみで充分の精度をもつと云い得る。従って垂直方向集中荷重に対する解は近似的に充分な精度で次の様に与えられる。

$$w = \frac{L_0}{4} (1 + 2 \log f)$$

$$N_\theta = \frac{E}{c} L_0 (7 + 12 \log f) s_0 f^2 \sin 2\theta$$

$$N_r = \frac{E}{c} L_0 s_0 f^2 \sin 2\theta$$

$$N_{r\theta} = -\frac{E}{c} L_0 (2 + 6 \log f) s_0 f^2 \cos 2\theta$$

$$M_r = \frac{D}{A} \cdot \frac{E}{c} L_0 \{ (3 + \mu) + 2(1 + \mu) \log f \}$$

$$M_\theta = \frac{D}{A} \cdot \frac{E}{c} L_0 \{ (1 + 3\mu) + 2(1 + \mu) \log f \}$$

$$M_{r\theta} = \frac{D}{A} \cdot \frac{E}{c} L_0 (1 - \mu) \{ 4 + 20 \log f \} s_1 f^4 \sin 4\theta$$

----- (5)

## §2 板の場合への移行について

解の形より推察して (5) について検討を行なって充分であると思える。

$f = \sqrt{h/c}$  である故  $w$  に代入すると

$$w = \frac{P}{8\pi \sqrt{12(1-\nu)}} \left\{ \frac{c}{E} \frac{E}{t^2 c} r^2 \left( \log r + \log \sqrt{h/c} \right) \right\}$$

$$= B \cdot r^2 \{ \log r + \log \sqrt{h/c} \}$$

$c \rightarrow \infty$  となると板の場合となるが、上式を見るに  $B$  には  $c$  は含まれず、 $\{\}$  内の後項は  $c \rightarrow \infty$  で消える。従って  $W$  は原点 (荷重点) で有限であり、又  $r$  の高次の項は  $c \rightarrow \infty$  で消えるから、これは確かに板の集中荷重問題の解と一致する。断面力  $N_\theta, N_r, N_{r\theta}$  は共に係数に  $1/c$  を含み  $c \rightarrow \infty$  で零。従って断面力は主になり。断面モーメントは係数には  $c$  を含まないが、 $\log r$  の項より  $c \rightarrow \infty$  で  $\infty$  となる項を含む故、 $c \rightarrow \infty$  で  $\infty$  となる。この表現も板の場合に一致する。従って  $c \rightarrow \infty$  となるとき前述の H.P. 殻の解は板の解と一致する。

## 序

殻構造の解析に当っては、外力に対する特解部分は薄膜理論解を用い、境界における附加二次応力と二次解部分の曲げ解を用いて求めるが、殻の形によつては曲げ解を分離することが困難な場合がある。例として H.P. 殻であるが、この殻の版への移行を考へる場合、外力は主として面内力で負担され、境界周辺のみにあつては考へられたい。全域にわたる大きな曲げが生じるはつて、これに対応する解は薄膜解に対応する解、即ち Inextensional 解から求めるものと考へられる。即ち、薄膜解及び Inextensional 解と見做せるものが近似的にも存在することが証明され得るならば、外力に対する特解は、このうちをもち、境界における二次応力と二次応力に適當な係数をかけて評価し、シエル設計を簡便ならしめることが可能である。しかし、このような功利的な面のみならず、やはり殻の一般解として Inextensional 解の存在を明確にしておくことは理論、動的問題への拡張性、種々の問題に対して必要なことである。従つてここではまずこの方面の既往の研究を調べ、次に一般解中における Inextensional 解の存在状態を明確にする。問題の性質上、ここでは前節までの如き球、円筒、H.P. 殻と対比せしめることもなく一纏に論じる。

## §.1 既往の研究

直接に Inextensional 解のみに着目したされたような研究は見当たらないが、円筒殻について約50年前にあったらしいことを記したものがある。ここでは殻の形体に応じて個々に取り扱った最新の研究中より Inextensional 解を pick up する。

## 回転殻

steel<sup>(1)</sup> は  $u_n, v_n, w_n$  を未知数として、3個の微分方程式を一般曲げ理論式として出しといる。ここで  $k^4 = E^2 / 12(1-\mu^2)R^2$  を非常に小さい値として無視し得るものとして Membrane 解及び Inextensional 解を得る。ところで  $\sigma = 4$  は釣合式において、 $Q_n, Q_n$  を無視するのと同じである。  $n=0, n=1$  の場合について面内断面力を Membrane 解として与えているが、これに対応する変位は積分表示のままである。この場合断面力は Singular action に対するものである。  $n=0$  の時は、それに対する変位のみであるが、  $n=1$  の場合には Singular action による変位以外の項を含んでいる。この積分は容易に求まらばいいものがあるが、  $\theta$  に関する積分定数として剛体的変位の解が出て来る可能性はある。  $n \geq 2$  については、

$$E t n u_n = (A K_n + B) \dot{\psi}_n \sin^2 \varphi + A \psi_n L_n$$

$$E t n w_n = -(A K_n + B) (\dot{\psi}_n \sin \varphi + \psi_n \cos \varphi) - A \left( \frac{1}{\sin \varphi} \psi_n L_n + \frac{1+\mu\lambda}{k \sin \varphi} \dot{\psi}_n \right)$$

として変位を求めといる。ここに  $\psi_n$  は積分方程式より得

られるものである。BはInextensional変形の係数 $\nu$ 、A,Bが同じorderの場合、曲げ応力は直断面力 $N_0, N_4$ に比較して無視出来る。A $\ll$ Bでは曲げ応力は卓越してくる。積分定数は $n \geq 2$ に対し $\nu$ は $n=0$ ほどには容易には得られないことを述べている。又、Inextensional解が意味を有するのは $n \ll k, 1 \ll k^4$ の場合であることについても述べている。これは当然考えられることである。個々の解の内容にわたってInextensional状態の解の内容を論じてはおられない。

筆者は球殻に対して、 $n=0, n=1$ の場合剛体的変位として $n \geq 2$ は一般にInextensional状態解が厳正に出て来ることを示したが<sup>(2)</sup>、これについては後述する。

### 円筒殻

K. Apelant & E. P. Popov の論文<sup>(3)</sup>のDiscussionの章においてA. L. BoumaがInextensional解が重要な意味をもつ場合があることについて述べ、例として円筒殻を出し、約50年前にこの事が問題になったことについて述べている。

W. Flüggeによると、一般的に形の解の特性値は示されているが、解の形には与えられておらず、解の個々の内容に関する検討はない。即ち円筒殻に関しても明確なInextensional解は見られない。

### 推進殻

文献(3)において、A. L. BoumaがInextensional解の重要性

に於いた後  $\Delta_K W = 0$  の解が近似的に解に含まれ、これによって曲げが生じるので  $\Delta_K W = 0$  が零の解をもつよう境界を与える必要のあることを論じているが、これに対して、Apeland 他は近似的に Inextensional 解が求まることを示している。 $\nabla_K^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  が  $\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  とかなり近いとすることによってある。

### H. P. 殻

Duddeck<sup>(5)</sup> は応力函数と変位を用いてあらわされた最終的釣合式

$$\Delta \Delta \Phi \pm i A \Phi_{,12} = 0$$

において

$$\begin{Bmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \end{Bmatrix} = \sum_n \begin{Bmatrix} \ddot{X}(z) \\ \ddot{\bar{X}}(z) \end{Bmatrix} e^{in\eta} + \sum_m \begin{Bmatrix} \ddot{Y}(\eta) \\ \ddot{\bar{Y}}(\eta) \end{Bmatrix} e^{im\zeta}$$

とし、 $\ddot{X}$  或は  $\ddot{\bar{X}}$  に対して ( $\ddot{Y}(\eta), \ddot{\bar{Y}}(\eta)$  に対しても同じ) 特性値を求めている。

$$\begin{bmatrix} -dn_1 & dn_4 \\ -dn_2 \pm dn_3 \end{bmatrix} \quad (\ddot{X} \text{ に対して}), \quad \begin{bmatrix} -dn_1 & -dn_4 \\ dn_2 \pm dn_3 \end{bmatrix} \quad (\ddot{\bar{X}} \text{ に対して})$$

$dn_4$  に対する解が Inextensional 解と Membrane 解に相当するものについて記述している。例として  $n = \pi$  の場合

$$f = C(0, \pi\eta), \quad KW = D \sin \pi\eta$$

この場合  $W$  は三エルの伸びの正しいまがりをあらわす解であり、固定境界の場合  $dn_4$  に関する伸びの正しい解は大きな影響を与える。伸びの正しい変形は  $n \neq 0$  とし、

$$u = \frac{L}{\sqrt{a}} \sqrt{1+c^2 \xi^2} g_2(\eta), \quad v = \frac{L}{\sqrt{a}} \sqrt{1+c^2 \eta^2} g_1(\xi)$$

$$w = L \frac{\sqrt{a}}{c} \left[ \frac{1}{c} (g_{2,2} + g_{1,1}) - \frac{c^2}{a} (\eta g_2 + \xi g_1) \right]$$

であり、 $u, v$  から決まる  $w$  があこり得るから  $u, v$  は伸縮の変形を与えることになる。

以上を示されたように Inextensional 解の重要性について H.P 殻において論じられていゝ。だが具体的にどの程度の影響を示すものかあるかは示されなかつた。

## §2. 一般的を取り扱い

ここからは一般的に Inextensional 解がどの程度の近似で存在するものかを論じる。理論は微小変位に基づく弾性理論であり、次の仮定に従う。

- ・厚さ方向応力無視
- ・Kirchhoff, Love の仮定

釣合式

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} - H_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + P^{\beta} = 0 \quad \text{--- (1-a)}$$

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} + q^{\beta}|_{\alpha} + P = 0 \quad \text{--- (1-b)}$$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha} - q^{\beta} = 0 \quad \text{--- (2-a)}$$

$$\epsilon_{\lambda\beta} n^{\lambda\beta} - \epsilon_{\lambda\beta} m^{\alpha\beta} H_{\alpha}^{\lambda} = 0 \quad \text{--- (2-b)}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - H_{ij} w \quad \text{--- (3)}$$

$$K_{ij} = (u_i H_j + w_{,i})|_j + H_j^i (u_{i,j} - H_{ij} w) \quad \text{--- (4)}$$

$$n^{ij} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} [g^{ia} g^{jb} + g^{ib} g^{ja} + \frac{1-\nu}{1+\nu} g^{ij} g^{ab}] \epsilon_{ab} \quad \text{--- (5)}$$

$$m^{ij} = -\frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[ g^{ia} g^{jb} + g^{ib} g^{ja} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{ij} g^{ab} \right] K_{ab} \quad \text{-----} \quad (6)$$

適合条件式

$$\epsilon^{ik} \epsilon^{jk} K_{ks} H_{ij} + \epsilon^{ik} \epsilon^{jk} \epsilon_{ksl} l_{ij} = 0 \quad \text{-----} \quad (7)$$

$$-\epsilon^{ik} \epsilon^{jk} K_{ksl} i + H_p^i \epsilon^{ac} \epsilon^{pb} \epsilon_{bcl} c + \frac{1}{2} \epsilon^{pj} \epsilon^{qf} (H_g^c \epsilon_{fc}) |_p = 0 \quad \text{-----} \quad (8)$$

とこより  $\epsilon^{ij}$  も  $Inextensional$  <sup>22</sup> 解があるとする。

$$\epsilon_{ij} = 0 \quad K_{ij} \neq 0 \text{ (かたらずしも)}$$

すると、

$$(7) \rightarrow \epsilon^{ik} \epsilon^{jk} K_{ks} H_{ij} = 0 \quad \text{-----} \quad (9)$$

$$(8) \rightarrow -\epsilon^{ik} \epsilon^{jk} K_{ksl} i = 0 \quad \text{-----} \quad (10)$$

(10) 式は Mainardi-Coddazi の積分可能条件であって、通常の理論では、これは成立しているものとしている。

従って、問題は  $\epsilon_{ij} = 0$  として  $u_i, w$  を決定する場合、これをを用いて (1-a, b), (2-a, b), (9) 式が満たされるかどうかということになる。

(1-a) において、 $H_g^d \gamma^e$  は  $\gamma^e$  の接線方向の成分をあらわすだけであって、 $\gamma^e$  が零でない限り、決して零にはならない。曲率が大きくなる程大になる量である。従って、この量の検討もあまりやっても意味がない。(1-b) について検討を行う。外力を零として取り扱っても一般性は失われない。(1-b) を変形して次のようにあらわす。

$$Y = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left[ g^{ia} g^{jb} + g^{ib} g^{ja} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{ij} g^{ab} \right] K_{ab} l_{ij} \quad \text{-----} \quad (11)$$

(9) 式より



$$T = \frac{1}{g} K_{22} H_{11} + \frac{1}{g} K_{11} H_{22} - \frac{1}{g} (K_{12} H_{12} + K_{21} H_{21}) \quad \text{--- (12)}$$

(3) 式'において  $\varepsilon_{ij} = 0$  とすることにより  $K$  の関係を得る。

$$u_{11} - H_{11} w = 0, \quad \frac{1}{2}(u_{12} + u_{21}) - H_{12} w = 0, \quad u_{22} - H_{22} w = 0 \quad \text{--- (13)}$$

(10) 式より

$$K_{12}|_2 - K_{22}|_1 = 0 \quad K_{12}|_1 - K_{11}|_2 = 0 \quad \text{--- (14)}$$

又、ここに

$$H_1' = g'' H_{11} + g^{12} H_{12}, \quad H_2' = g'' H_{12} + g^{12} H_{22}$$

$$H_2'' = g^{22} H_{22} + g^{12} H_{12}, \quad H_1'' = g^{12} H_{11} + g^{22} H_{12}$$

である。ここに  $( )_j$  は  $j$  による共変微分をあらわしている。

i)  $H_{11} = H_{22} = 0, H_{12} \neq 0$  なる曲面 (捩れに曲面, H.P. 殻等)

$$(12) \text{ 式より } T = \frac{1}{g} K_{12} H_{12}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= (u_1 H_1' + u_2 H_2' + w_{,1})|_2 + H_2' (u_{11} - H_{11} w) + H_2'' (u_{21} - H_{12} w) \\ &= (u_1 g^{12} H_{12} + u_2 g^{22} H_{12} + w_{,1})|_2 + g'' H_{12} (u_{11}) + g^{12} H_{12} (u_{21} - H_{12} w) \end{aligned}$$

(13), (14) 式を代入して

$$K_{12} = (g^{12} u_1 + g^{22} u_2) H_{22}|_1 + w_{,1}|_2 + g^{12} H_{12} H_{12} w$$

同様にして

$$K_{21} = (g^{12} u_2 + g'' u_1) H_{11}|_2 + w_{,2}|_1 + g^{12} H_{12} H_{12} w$$

しかるに  $K_{12} = K_{21}$  としていさから、(これは厳正には一般にもう少し多くの項を取る必要がある)

又、 $w_{,12} = w_{,21}$  故

$$(y^{12}u_1 + y^{22}u_2)H_{22,1} - (y^{12}u_2 + y^{22}u_1)H_{11,2} = 0$$

$u_1, u_2$  には何らの拘束を与えずとは不可がある故  $H_{22,1} = 0$ ,  $H_{11,2} = 0$  と見做す程度の近似を  $K_{12} = K_{21}$  とするとま既に行なっている。故に

$$K_{12} = w_{,12} + y^{12}H_{12}H_{12}w$$

である。さく、 $z_{ij} = 0$  から変位  $u_i, w$  の形は一意的に決定される。従って適合条件及び法線方向釣合式 (1-b) はかたちずしも満たされるとはかぎらない。しかし、"偏平" という条件を与えると Christoffel の記号  $\{i, j, k\} \equiv 0$  となり、共変微分は単なる微分と見做される。即ち、 $K_{ij|k} = K_{ij,k}$  等である。ところで、この程度の近似は  $H_{22,1} = H_{11,2} = 0$  とするとま既に行なっている。この場合  $z_{ij} = 0$  からは  $u_i, w$  は一意的には決定し得ない。従って適合条件が成立しているとすると  $T = 0$  であり、よって (1-b) は次のようになる。

$$Y = \frac{2}{1-\nu} [y^{22}y^{22}K_{22,22} + y^{22}y^{11}K_{11,11}]$$

$$K_{11} = w_{,11} + y^{22}H_{12}(\angle u_{,11} - H_{12}w)$$

$$K_{22} = w_{,22} + y^{11}H_{12}(\angle u_{,12} - H_{12}w)$$

従って、 $T = 0$  且  $Y = 0$  なるように  $u_i, w$  を決定することが可能となる。直交座標系の場合、 $y^{11}, y^{22}$  に比して  $y^{12} = 0$  とおける。(通常、偏平HP殻ではこのようにおく。) この場合には  $K_{12} = 0$  は恒等的に成立することになり、 $Y = 0$

として厳正に Inextensional 解は求まる。換言すると  $g^{12}=0$  と考えられる曲面は共変微分と単なる微分と考えられるより、曲面では Inextensional 状態解を解として用いることが可能である。

ii)  $H_{12}=0$  の曲面 (球, 円筒, 推進殻等),

(3) 式より,

$$u_{11} - H_{11}w = 0, \quad u_{12} + u_{21} = 0, \quad u_{22} - H_{22}w = 0 \quad \text{--- (15)}$$

$$(1) \rightarrow T = K_{22}H_{11} + K_{11}H_{22} \quad \text{--- (16)}$$

(16) 式は成立してゐるとする。(15) 式が成立してゐるとすると、(1-b) より

$$Y = c \cdot \frac{D}{1-D} \left[ (g^{11}H_{11} - g^{22}H_{22}) \left( g^{22} \frac{1}{H_{11}} K_{11|22} - \frac{g^{11}}{H_{22}} K_{22|11} \right) + g^{12} \left\{ 2g^{12} (K_{11|22} + K_{22|11}) + (g^{11}H_{11} - 3H_{22}g^{22}) K_{11|12} / H_{11} + (3g^{11}H_{11} - H^{22}g^{22}) K_{11|21} / H_{11} \right\} \right]$$

となる。さて、 $g^{12}=0$  なるより、曲面では、(回転体, 球, 円筒, 円錐等)

$$Y = D \left[ (g^{11}H_{11} - g^{22}H_{22}) (g^{22}H_{22} K_{11|22} - g^{11}H_{11} K_{22|11}) \right] \cdot \frac{1}{H_{11}H_{22}}$$

もし  $g^{11}H_{11} - g^{22}H_{22} = 0$  なる曲面があれば、法線方向釣合式は恒等的に満たれることになり、(15)より決まる  $u_i, w$  によって  $T$  が恒等的に零になればよい。球殻ではこれが成立する。従って球殻では厳正に Inextensional 解は存在する。ところで  $K_{11|22} = K_{12|12}$ ,  $K_{22|11} = K_{12|21}$  であり、(Mainardi-Coddazi の条件より) 又、

$$K_{12|12} - K_{12|21} = R^{\alpha}_{,112} K_{\alpha 2} + R^{\alpha}_{,212} K_{1\alpha}$$

である。Riemann-Christoffel の曲率テンソル  $R^{\alpha}_{,112}, R^{\alpha}_{,212}$  が非常に小さいと見做せよ曲面 ( $H_{11}=0$  或は  $H_{22}=0$  或は  $R^{\alpha}_{,ij} = 0$ ) である。この場合は円筒、円錐等がある。) では

$$Y = -D[(g''H_{11} - g^{22}H_{22})^2 K_{12|12}] \cdot \frac{1}{H_{11}H_{22}}$$

と表す。又、

$$\begin{aligned} K_{12} &= (g''H_{11}u_1 + w_{,1})|_2 + g^{22}H_{22}u_2|_1 \\ &= (g''H_{11} - g^{22}H_{22})u_{12} + w_{,12} + g''H_{11}|_2 u_1 \end{aligned}$$

であり、 $K_{12} = K_{21}$  とすると  $H_{11}|_2 = 0$  としこいることになる。

従って  $H_{12}|_1 = 0$  故に

$$\begin{aligned} K_{12} &= (g''H_{11} - g^{22}H_{22})u_{12} + w_{,12} \\ K_{11} &= (g''H_{11}u_1 + w_{,1})|_{11} + g''H_{11}(u_{11} - H_{11}w) \\ &= g''H_{11}u_{11} + w_{,11} + g''H_{11}|_1 u_1 \\ K_{22} &= g^{22}H_{22}u_{22} + w_{,22} + g^{22}H_{22}|_2 u_2 \end{aligned}$$

従って、Riemann-Christoffel の曲率テンソルと (15) 式より恒等的に  $T=0$  が出る。但し、 $R^2_{,112} = g^{22}H_{11}H_{22}$ ,  $R^1_{,212} = -g''H_{11}H_{22}$  である。故に  $\varepsilon_{ij}=0$  が満たれるとき適合条件は成立している。従って  $Y$  が零又は非常に小さいければ近似的に In-extensional 解は存在しこいるといえる。接線方向釣合式が成立すると見做すならば、 $H^1_1=0$ ,  $H^2_2=0$  としこいるのであり、同じ程度、近似  $H_{11}g'' - H^1_1=0$ ,  $H^{22}g^{22}=0$  と見做

し、 $\gamma=0$  が成立すると考えられる。

とこで、

$$g_{11}^1 = \frac{c}{1-\nu} Dg''(g^{12} - \frac{H_{11}}{H_{22}} g'') K_{12} l_{c1}$$

$$g_{12}^1 = \frac{c}{1-\nu} Dg^{22}(g'' - \frac{H_{22}}{H_{11}} g^{22}) K_{12} l_{c1}$$

であり、 $\gamma = g_{11}^1 + g_{12}^1$  である。従って、 $g_{11}^1$  と (或は  $g_{12}^1$ ) と  $\gamma$  との比較をみると、 $\gamma/g_{11}^1 = 1 - g''H_{11}/g^{22}H_{22}$  である。回転殻ではこの値は  $(r_2^2 - r_1^2) \sin^2 \varphi / \{r_2^2 + (r_1^2 - r_2^2) \sin^2 \varphi\}$  であって、 $(r_2^2 - r_1^2)$  に関係する。かなり小さい値と見做される。(回転殻の形状によるが) Inextensional state の存在するときは  $g_{11}^1 = -g_{12}^1$  である。

$g^{12} \neq 0$  であるような曲面では、(推動殻等) 一般にその程度を決めることは困難であるが、扁平な場合  $g^{12}$  は  $g^{11}, g^{22}$  に比較して非常に小さくなり、無視可能となる。即ち、 $g^{11} = 1+a$ , ( $a \ll 1$ ) に対して  $g^{12} = O(u)$  であり、従って  $g^{12}/g^{11} \approx O(a(1-u))$  であって、この程度の誤差で  $g^{12}$  を無視出来るならば、既述の  $g^{12} = 0$  の場合と同様になる。建築物にあらずとも曲面では  $g^{12} = 0$  とし得る場合が大部分である。

### §3. Inextensional 解と与える式

#### 回転殻

$$\begin{aligned} w_{,11} + \frac{(r_2^2 - r_1^2) \sin \varphi \cos \varphi + r_2^2 \cot \varphi}{r_2^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \varphi} w_{,1} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} w_{,22} \\ + \frac{r_1^2 \{ (1 + \cos^2 \varphi) r_2^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi \}}{(r_2^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \varphi)^2} w = 0 \end{aligned}$$

球殻.

$$w_{,11} + \cot \varphi \cdot w_{,1} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot w_{,22} + \lambda w = 0$$

円筒殻

$$w_{,11} = 0 \quad \text{且} \quad w_{,2222} + w_{,22} = 0$$

円錐殻

$$w_{,11} = 0 \quad \text{且} \quad u_2|_2 = H_{22} w, \quad [(g^{22} H_{22} u_2)|_2 + w_{,2}|_2]|_{22} = 0$$

推進殻

$$w_{,11} - \left( \{^1_1\} + \frac{H_{11}}{H_{22}} \{^1_2\} \right) w_{,1} - \left( \{^2_1\} + \frac{H_{11}}{H_{22}} \{^2_2\} \right) w_{,2} + \frac{H_{11}}{H_{22}} w_{,22} \\ + (g^{11} H_{11} + g^{22} H_{22}) H_{11} w = 0$$

$$\text{扁平とすると} \quad w_{,11} + H_{11}/H_{22} \cdot w_{,22} = 0$$

H.P. 殻 ( $\varepsilon = \varepsilon g/c$ )

$$w_{,12} = 0 \quad \text{且} \quad w_{,1111} + w_{,2222} = 0$$

ところで円筒殻や円錐殻 H.P. 殻等では変位に決する 4 階の微分方程式が与えられる。球殻等の場合と異なる如く見えるが、これら 4 階微分方程式の 4 個の解のうち、2 個は Membrane 応力的状態に対応するものである。この時はモーメントは生じないという。例えば、H.P. 殻で  $w_{,12} = 0$ ,  $w_{,11} = 0$ ,  $w_{,22} = 0$  の解はモーメントが全く生じないという解である。円筒殻、円錐殻についても同様である。又回転殻においても特別の場合

合にはモーメントの生じない解が含まれている。

従って、上式の解を求めると、それが Inextensional 的解である。

#### §4. Inextensional 解

球殻、円筒殻 H.P. 殻について Inextensional 解を求めこめる。

##### (i) 球殻

$$n=0 \quad w = D_0' \cos \varphi \quad \text{剛体的移動}$$

$$n=1 \quad w = D_1' \sin \varphi \cdot \cos \theta \quad \text{剛体的移動}$$

$$n \geq 2 \quad w = \left[ D_1^n (n + \cos \varphi) \cdot \tan^n \frac{\varphi}{2} + D_2^n (n - \cos \varphi) \cdot \cot^n \frac{\varphi}{2} \right] \cos n\theta$$

である。  $n=0, n=1$  の場合にはこれに軸まわりの回転の項が付け加えられるが、応力には関係ない。

##### (ii) 円筒殻

$$w = f(x) \cdot g(\theta)$$

$$f(x) = Ax + B$$

$$g(\theta) = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta$$

このうち  $C_1$  は曲げモーメントに関係ない。 $C_2$  は振り回転に関する  $EQ$  である。

##### (iii) H.P. 殻

$$w = \{ f(x) + g(y) \} \cdot C_i$$

$$f(x) = A + x + x^2 + x^3$$

$$g(y) = B + y + y^2 + y^3$$

$A$  及び  $w$  の項、 $F$  及び  $y$  の項は曲げモーメントに何らの

202

影響も与えたり。これら  $w$  から変位  $u, v$  等も決定することが出来る。

§5. Inextensional 状態のおこるような境界条件  
Inextensional Solution が実際にどの程度の影響を与えるものかを知るとは数値計算によらねばならぬ。しかし、板に近い H.P. 殻等ではかなり大きな曲げモーメントを生じるであろうことは推察される。従って、ここではこのような Inextensional 解が意味をもたなくなるような境界条件を考へてやる。

回転殻 (球殻等)

$\varphi = \varphi_0$  で  $w = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \quad w = u_1 = 0, \quad u_1 = u_2 = 0$  のいずれかの時全域で  $w = 0$

円筒、円錐殻

$x = l_1, x = l_2$  で  $w = 0$  の時全域で  $w = 0$

推進殻 (H.P. 殻を含む)

$x = \pm a, y = \pm b$  で  $w = 0$ , 或は  $u_1 = u_2 = 0$  の時全域で  $w = 0$  とする。

これら以外では、おそらくしも全域で  $w = 0$  にはならない。

§6. 補 曲面の幾何量

回転体

$$z = r_1 \cos \varphi + u, \quad x = r_2 \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r_2 \sin \varphi \sin \theta$$



$$g_{11} = r_2^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{22} = r_2^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{12} = 0$$

$$H_{11} = -r_2^2 r_1 \sin \varphi / \sqrt{g}, \quad H_{22} = -r_2^2 r_1 \sin^3 \varphi / \sqrt{g}, \quad H_{12} = 0$$

$$\{^1_2 2\} = -\frac{1}{g} r_2^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi, \quad \{^1_1 1\} = \frac{r_2^4}{g} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi (r_1^2 - r_2^2)$$

$$\{^2_2 2\} = \{^1_1 1\} = 0$$

球

$$z = a \cos \varphi, \quad x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta$$

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{12} = 0, \quad g = a^4 \sin^2 \varphi$$

$$H_{11} = -a, \quad H_{22} = -a \sin^2 \varphi, \quad H_{12} = 0$$

$$\{^1_2 2\} = -\frac{1}{g} a^4 \sin^3 \varphi \cos \varphi, \quad \{^1_1 1\} = \{^2_2 2\} = \{^1_1 1\} = 0$$

圓筒

$$z = z, \quad x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = a^2, \quad g_{12} = 0, \quad g = a^2$$

$$H_{11} = H_{12} = 0, \quad H_{22} = a$$

$$\{^1_1 1\} = \{^1_2 2\} = \{^2_1 1\} = \{^2_2 2\} = \{^1_1 2\} = \{^1_2 1\} = 0$$

圓錐

$$x = (b-z) \sin \alpha \cos \theta, \quad y = (b-z) \sin \alpha \sin \theta, \quad z = z$$

$$g_{11} = 1 + \sin^2 \varphi, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (b-z)^2 \sin^2 \alpha$$

$$H_{11} = H_{12} = 0, \quad H_{22} = (b-z)^2 \sin^2 \alpha / \sqrt{g}$$

$$\{^1_2 2\} = \frac{1}{g} (b-z)^3 \sin^4 \alpha, \quad \{^1_1 1\} = \{^2_1 1\} = \{^2_2 2\} = 0$$

堆疊的盤

$$z = \frac{x^2}{a^2} + y \cdot \frac{y^2}{b^2}$$

$$g_{11} = 1 + \frac{4x^2}{a^4}, \quad g_{22} = 1 + y^2 \frac{4y^2}{b^4}, \quad g_{12} = \frac{8xy}{a^2 b^2}$$

$$H_{11} = \frac{2x}{a^2} / \sqrt{g}, \quad H_{12} = 0, \quad H_{22} = \frac{2y}{b^2} / \sqrt{g}$$

$$\{^1_1 1\} = \frac{1}{2g} \frac{8x}{a^2}, \quad \{^1_2 2\} = \frac{1}{2g} \frac{8xy}{a^2 b^2}, \quad \{^2_2 2\} = \frac{1}{2g} y^2 \frac{8y}{b^4}$$

$$\{^2_1 1\} = \frac{1}{2g} \frac{8xy}{a^2 b^2}$$

H. P. 殼

$$Z = x y / c$$

$$g_{11} = 1 + \frac{y^2}{c^2},$$

$$g_{12} = -\frac{xy}{c^2},$$

$$g_{22} = 1 + \frac{x^2}{c^2}$$

$$H_{11} = H_{22} = 0,$$

$$H_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\{1_1\} = \{1_1^2\} - \{2_2^1\} = \{2_2^2\} = 0$$

## 第Ⅴ部 偏平H.P. シェルの実用的な解について

### 序

H.P. シェルの一般解はここ数年、内外に数多く見られるようになったが<sup>[1]</sup>、いずれも計算に相応の労力を要し、電子計算機のを連した今日でもプログラム作製が煩雑になり、あまり実用性とはいえない。したがってここでは限られた境界条件の解であるが、比較的数値計算あるいはプログラム作製が容易で、且つH.P. シェル性状把握に充て役立つ解の形を報告する。

一般にシェルの解法は各種釣合条件式を満たすような一般解を求め、未知積分常数を境界条件から決定する方法をとる。ところがある特殊な境界条件の場合、その条件を満たすように解の形を仮定してやり、各種釣合条件式を満たすように未知常数を決定するという方法を取り得る。この方法の方が計算も容易であって且つ実際の数値計算に当ってその精度、収斂性(通常展開を行なうので)も良好なことは容易に推測がつく。

一般的境界条件はいろいろの組合せが存在するが、実用上、つりように見做される場合がかなり多い。

①  $w$  および その 2 次導函数が零になる場合

②  $w$  および その 1 次導函数が零になる場合

①は周辺で単純支持の場合であり、②は固定等の場合である。①の解の形は三角函数型であって、既に収斂のよい形で論じられている。<sup>[2]</sup> ②の解の形は双曲線函数型と考

えられる。ここでは主としてこの場合を論ずる。

ここに示したのは  $z = k(x^2 - y^2)/2$  および  $z = xy/c$  の曲面であって、前者に対しては周辺固定の場合、後者に対しては6個の境界条件に対する解を示した。これらの中には非現実的な境界条件もあるが、特に  $N_{xy} = 0$  とするようなものは H. P. シエルの特性を無視するものであるが、このシエルの性状把握の上で役立つものと考えられる。しかし (4-5) のような境界条件 ( $w = w' = v_x = v_y = 0$  かつ  $x = \pm a$  等) 等は実用上しばしば見られる境界である。

前者の曲面形の同一境界条件に対してフーリエ級数解が与えられているので、<sup>[3]</sup> 比較のため数値計算例を示す。

尚ここで取り扱ったのは偏平なシエルであって、ウラソフ型の釣合式を用いる。

## §1 解法と解

解の解が与類推、次のように、 $T_n$  函数列群を与える。

$$\sum_n X_n(\xi) \cdot Y_m(\eta) = \sum_n \left( \frac{\cosh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} - \frac{\cosh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} \right) \cdot \left( \frac{\cosh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} - \frac{\cosh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} \right) \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum_n x_n(\xi) \cdot y_m(\eta) = \sum_n \left( \frac{\cosh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} + \frac{\cosh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} \right) \cdot \left( \frac{\cosh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} + \frac{\cosh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} \right) \quad \text{--- (2)}$$

$$\sum_n U_n(\xi) \cdot V_m(\eta) = \sum_n \left( \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} - \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} \right) \cdot \left( \frac{\sinh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} - \frac{\sinh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} \right) \quad \text{--- (3)}$$

$$\sum_n u_n(\xi) \cdot v_m(\eta) = \sum_n \left( \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} + \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\cosh \lambda_n} \right) \cdot \left( \frac{\sinh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} + \frac{\sinh \lambda_m \eta}{\cosh \lambda_m} \right) \quad \text{--- (4)}$$

$$\sum_{p \in \mathbb{R}} \Phi_p(\xi) \cdot \Psi_b(\eta) = \sum_{p \in \mathbb{R}} \left( \frac{\sinh u_p \xi}{\cosh u_p} + \frac{\sinh u_p \xi}{\cosh u_p} \right) \cdot \left( \frac{\sinh u_b \eta}{\cosh u_b} + \frac{\sinh u_b \eta}{\cosh u_b} \right) \quad \text{--- (5)}$$

$$\sum_p \phi_p(\xi) \cdot \psi_b(\eta) = \sum_p \left( \frac{\sinh u_p \xi}{\cosh u_p} - \frac{\sinh u_p \xi}{\cosh u_p} \right) \cdot \left( \frac{\sinh u_b \eta}{\cosh u_b} - \frac{\sinh u_b \eta}{\cosh u_b} \right) \quad \text{--- (6)}$$

$$\sum_p S_p(\xi) \cdot T_b(\eta) = \sum_p \left( \frac{\cosh u_p \xi}{\cosh u_p} + \frac{\cosh u_p \xi}{\cosh u_p} \right) \cdot \left( \frac{\cosh u_b \eta}{\cosh u_b} + \frac{\cosh u_b \eta}{\cosh u_b} \right) \quad \text{--- (7)}$$

$$\sum_p o_p(\xi) \cdot t_b(\eta) = \sum_p \left( \frac{\cosh u_p \xi}{\cosh u_p} - \frac{\cosh u_p \xi}{\cosh u_p} \right) \cdot \left( \frac{\cosh u_b \eta}{\cosh u_b} - \frac{\cosh u_b \eta}{\cosh u_b} \right) \quad \text{--- (8)}$$

$$\xi = \xi \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

又、

$$\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_i = 0, \quad \tanh u_j - \tanh u_j = 0 \quad \text{--- (9, 10)}$$

を満すように、 $\lambda_i, u_j$  は次のように値をとる。

$$\begin{cases} (4) \rightarrow \lambda_i \approx \frac{4i-1}{4} \pi, \quad (i \geq 2) & \lambda_1 = 2.36504 \\ (10) \rightarrow u_j \approx \frac{4j+1}{4} \pi, \quad (j \geq 1) \end{cases} \quad \text{--- (11)}$$

と、(1) ~ (8) の各函数列の直交性を調べると、

$$\int_{-1}^1 X_i X_j, \quad \int_{-1}^1 x_i x_j, \quad \int_{-1}^1 U_i U_j, \quad \int_{-1}^1 u_i u_j = \begin{cases} \text{const.} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

すなわち正規直交函数列である。 $X_i, x_i, U_i, u_i$  等の函数列は直交性を有す。

$$\int_{-1}^1 X_i \phi_j = \int_{-1}^1 x_i \phi_j = \int_{-1}^1 X_i \Phi_j = \int_{-1}^1 x_i \Phi_j = 0, \quad \text{for all } i, j$$

すなわち  $\lambda_n$  を含む函数列と  $\mu_p$  を含む函数列系とは互いに直交系であり、全く独立な関係にある。

変数  $\eta$  に関する函数列についても上述と全く同じとなる。

次に曲面の形と境界条件および解の形を考へる。

$$\text{I. } z = \frac{k}{2}(x^2 - y^2), \quad k_x = k_y = k = \frac{1}{r}, \quad k_{xy} = 0$$

であらわされる曲面。但し、 $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$

なる形の曲面の境界条件は通常次の場合がよい。

$$w = w' = u = v = 0$$

力の釣合式、適合条件式は、

$$\left. \begin{aligned} D \cdot \frac{1}{a^2} \nabla^* \nabla^* w + k \cdot \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \phi &= P(a\xi, b\eta) \\ \frac{1}{Et} \cdot \frac{1}{a^2} \nabla^* \nabla^* \phi - k \cdot \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (12)$$

== 5 ==

$$x = a\xi, \quad y = b\eta \quad \lambda = a/b, \quad \nabla^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$\phi$ : 応力函数       $P$ : 鉛直外力       $w$ : 鉛直変位

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

I-1) 対称荷重の場合

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum A_{nm} X_n(\xi) Y_m(\eta) \\ \phi &= \sum D \cdot \frac{1}{a^2} B_{nm} X_n(\xi) Y_m(\eta) \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (13)$$

と置く。ポアソン比  $\nu = 0$  とすると、(14) の条件より

$$w = w' = u = v = 0 \quad \text{at } x = \pm a \quad \cdot = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$w = w' = u = v = 0 \quad \text{at } y = \pm b \quad \cdot = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

従つて (12) の形は周上固定の境界条件を満足している。

(13) を (12) に代入すると、

$$\sum_{n,m} \left[ \frac{D}{a^4} (\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_n^4) A_{nm} X_n Y_m + \frac{D}{a^4} \lambda^2 < \lambda_n^2 \lambda_m^2 A_{nm} x_n y_m \right. \\ \left. + \frac{k}{a^3} (\lambda_n^2 X_n y_m - \lambda^2 \lambda_m^2 x_n Y_m) B_{nm} \right] = E(u, v) \quad (14-1)$$

$$\sum_{n,m} \left[ \frac{D}{E^2} \frac{1}{a^5} (\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) B_{nm} x_n y_m + \frac{D}{E^2} \frac{\lambda^4}{a^5} < \lambda_n^2 \lambda_m^2 B_{nm} X_n Y_m \right. \\ \left. - \frac{k}{a^2} (\lambda_n^2 x_n Y_m - \lambda^2 \lambda_m^2 X_n y_m) A_{nm} \right] = 0 \quad (14-2)$$

$X_i, Y_j$  の正規直交性を利用して次のように展開を行なう。

$$x_n = \sum_{i=1}^{\infty} k_{in} X_i ;$$

$$k_{in} = \frac{4\lambda_i^2}{\lambda_n^4 - \lambda_i^4} (\lambda_n \tanh \lambda_n - \lambda_i \tanh \lambda_i)$$

$$k_{nn} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cosh^2 \lambda_n} - \frac{1}{\cosh^2 \lambda_n} \right) + \frac{1}{\lambda_n} \tanh \lambda_n$$

$$y_m = \sum_{j=1}^{\infty} h_{jm} Y_j ;$$

$$h_{jm}, h_{mm} \text{ は } k_{in}, k_{nn} \text{ と同じ形状にある。}$$

$$(i > j, \quad n > m)$$

次の変換と逆の変換を行なう。

$$\sum_{n,m} < \lambda_n^2 \lambda_m^2 A_{nm} \sum_j k_{in} X_i h_{jm} Y_j = \sum_{n,m} X_n Y_m \sum_{i,j} < \lambda_i^2 \lambda_j^2 A_{ij} k_{ni} h_{mj}, \text{ etc.}$$

代入して  $X_n, Y_m$  が各々直交関数列にあることを考えると、

(14-1), (14-2) 式は次のように書ける。

$$E(u, v) = \sum_{n,m} E_{nm} X_n Y_m$$

と展開して

$$(\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) A_{nm} + \sum_j \lambda^2 < \lambda_i^2 \lambda_j^2 k_{ni} h_{mj} \\ + u \sum_i \lambda_n^2 h_{mi} B_{ni} - v \sum_j \lambda_i^2 \lambda_m^2 k_{nj} E_{jm} = \frac{\lambda^4}{D} E_{nm} \quad (15-1)$$

$$\sum_{i,j} K(\lambda_i^4 + \lambda_i^2 \lambda_j^4) k_{ni} h_{mj} B_{ij} + \lambda^2 \leq r_i \lambda_n^2 \cdot \lambda^2 \cdot B_{nm} \\ - \mu \sum_i \lambda_i^2 k_{ni} A_{im} + \mu \sum_j \lambda_j^2 h_{mj} A_{nj} = 0 \quad \text{--- (15-2)}$$

== に、

$$\mu = k\mu = \frac{u}{r} \quad K = \frac{t^2}{12a^2} \\ E_{nm} = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 E(u, b, \eta) X_n Y_m d\eta d\eta \quad \text{--- (16)}$$

$$\text{但し、} \quad 1/\cosh^2 \lambda_n \approx 0, \quad 1/\cosh^2 \lambda_n \approx 1$$

(15-1), (15-2) 式の  $A_{nm}, B_{nm}$  に對する連立一次方程式を解けば未知常数は決まり、変形断面力は容易に求まる。算例はあとにまとめて記す。

## 1-2) 逆対称荷重の場合

$$W = \sum_{P \in \Omega} A_{P\bar{P}} \Phi_P \psi_{\bar{P}} \\ \Phi = \sum_{P \in \Omega} \frac{1}{u} B_{P\bar{P}} \Phi_P \psi_{\bar{P}} \quad \text{--- (17)}$$

とあり

$$\Phi_P = \sum_I K_{IP} \Phi_I ; \\ K_{IP} = \frac{4u_I^2}{u_I^2 - u_P^2} - (u_I \tanh u_P - u_P \tanh u_I) \\ K_{PP} = -\frac{1}{2} \left( \coth^2 u_P + \frac{1}{\cosh^2 u_P} \right) + \frac{1}{u_P} \tanh u_P \\ \Psi_{\bar{P}} = \sum_J H_{J\bar{P}} \psi_J ; \\ H_{J\bar{P}}, H_{\bar{P}\bar{J}} \text{ は } K_{IP}, K_{PP} \text{ に 342341 同 じ 形} \\ E(u, b, \eta) = \sum_{P \in \Omega} E_{P\bar{P}} \Phi_P \psi_{\bar{P}}$$

と展開する。と全く同様、所要の境界条件を満たした解が存在するか条件式として次が得られる。



$$(u_p^4 + \lambda^4 u_q^4) A_{p\bar{q}} + \sum_{IJ} \lambda^2 u_I^4 u_J^4 K_{PI} \Gamma_{\bar{q}J} A_{IJ} \\ + u \sum_I u_I^2 H_{II} B_{nI} - u \sum_J \lambda^2 u_q^4 K_{mJ} B_{Jm} = \frac{u^4}{L} P_{p\bar{q}} \quad \text{--- (17-1)}$$

$$\sum_{IJ} K(u_I^4 + \lambda^4 u_J^4) K_{nI} H_{mJ} B_{IJ} + \lambda^2 \sum K u_p^4 u_q^4 B_{p\bar{q}} \\ - u \sum_I u_I^2 K_{nI} A_{Im} + u \sum_J \lambda^2 u_J^4 H_{mJ} A_{nJ} = 0 \quad \text{--- (17-2)}$$

== 12

$$P_{p\bar{q}} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(u\beta, b\eta) \phi_p \psi_{\bar{q}} \lambda_3 d\eta \quad \text{--- (18)}$$

他の  $\bar{q} \neq \bar{p}$  は (1-1) と同一である。

II  $z = \frac{1}{c} xy$  における波動方程式の曲面。但し  $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$  力の釣合式と適合条件式は、

$$\left. \begin{aligned} D \cdot \frac{1}{u^4} V^* V^* w + \frac{c}{u^2} \cdot \frac{\lambda}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta \partial \eta} &= F(u\beta, b\eta) \\ \frac{1}{u^4} \nabla^* \nabla^* \phi - \frac{-E\pm}{c} \cdot \frac{\lambda}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (19)}$$

== 13

$x = a\beta \quad y = b\eta \quad \lambda = u/b$ , 以後  $u = \frac{cy}{b}$  を用いる。

$$V^* = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$\phi$ : 応力変数  $u$ :  $x$  方向変位

$w$ : 鉛直変位,  $\eta$ :  $y$  方向変位

以後ポアソン比  $\nu = 0$  とする。

II-1) 境界において完全固定の場合

a) 対称荷重

$$w = \sum_{nm} A_{nm} X_n Y_m \quad \phi = \sum_{p\bar{q}} \frac{L}{u} B_{p\bar{q}} \bar{\Gamma}_p \psi_{\bar{q}} \quad \text{--- (20)}$$

とすると境界条件を満す。先と同様の方法により、又既述の諸係数は  $u$ -次の展開係数

$$u_n = \sum_i G_{in} \phi_i \quad ; \quad G_{in} = -\frac{4}{u_i^4 - \lambda_n^4} \lambda_i^2 \lambda_n \tan \lambda_i$$

$$j_m = \sum_j D_{jm} \psi_j \quad ; \quad D_{jm} = -\frac{4}{u_j^4 - \lambda_m^4} \lambda_j^2 \lambda_m \tan u_j$$

$$v_p = \sum_\nu C_{p\nu} X_\nu \quad ; \quad C_{p\nu} = \frac{4}{u_p^4 - \lambda_\nu^4} \lambda_\nu^3 \tan \lambda_\nu$$

$$T_b = \sum_\ell d_{\ell b} Y_\ell \quad ; \quad d_{\ell b} = \frac{4}{u_b^4 - \lambda_\ell^4} \lambda_\ell^3 \tan \lambda_\ell$$

を用い、

$$(\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) A_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^4 \lambda_i^2 \lambda_j^2 K_{ni} A_{mj} A_{ij} + \lambda \sum_\ell \lambda u_\ell u_\ell C_{n\ell} d_{m\ell} = \frac{u^4}{I} P_{nm} \quad \text{--- (20-1)}$$

$$\sum_{i,j} K(u_i^4 + \lambda^4 u_j^4) K_{pi} H_{qj} B_{ij} + \lambda^4 K u_p^2 u_b^4 B_{pb} - \lambda \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \lambda_j G_{pi} D_{qj} A_{ij} = 0 \quad \text{--- (20-2)}$$

であらわされる。  $P_{nm}$  は  $I$  と同じ表示にある。

b) 逆対称荷重

$$u = \sum_{p \in} A_{p\theta} \phi_p \psi_\theta, \quad \phi = \sum_{n,m} \frac{D}{u} B_{nm} x_n y_m \quad \text{--- (21)}$$

とすると境界条件を満す。先と同様の方法により、又既述の諸係数及  $u$ -次の展開係数

$$U_n = \sum_i E_{in} \phi_i \quad ; \quad E_{in} = -\frac{4}{u_i^4 - \lambda_n^4} u_i^3 \tan \lambda_n$$

$$V_m = \sum_j F_{jm} \psi_j \quad ; \quad F_{jm} = -\frac{4}{u_j^4 - \lambda_m^4} u_j^3 \tan \lambda_m$$

$$\alpha_p = \sum_\nu \alpha_{p\nu} X_\nu \quad ; \quad \alpha_{p\nu} = \frac{4}{u_p^4 - \lambda_\nu^4} \lambda_\nu^3 u_p \tan u_p$$

$$t_b = \sum_\ell \beta_{\ell b} Y_\ell \quad ; \quad \beta_{\ell b} = \frac{4}{u_b^4 - \lambda_\ell^4} \lambda_\ell^3 u_b \tan u_b$$

を用い、

$$(\mu_p^4 + \lambda^4 \mu_b^4) A_{p0} + \sum_{i,j} \lambda^2 \epsilon \mu_i^2 \mu_j^2 K_{pi} H_{0j} A_{ij} \\ + \lambda \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j F_{0j} E_{ij} = \frac{a^4}{D} F_{p0} \quad \text{--- (22-1)}$$

$$\sum_{i,j} (\lambda_i^4 + \lambda^4 \lambda_j^4) K_{ki} h_{mj} B_{ij} + \lambda^2 \epsilon K \lambda_n^2 \lambda_m^2 B_{nm} \\ - \lambda \sum_{\nu,l} \lambda_\nu \mu_l \epsilon d_{n\nu} \delta_{ml} A_{\nu l} = 0 \quad \text{--- (22-2)}$$

であらうと思われる。\$E\_{p0}\$ は \$I\$ と同じ表示である。

## II-2) 境界条件

$$u = u' = N_x = u = 0 \quad \text{at } x = \pm a$$

$$w = w' = N_y = v = 0 \quad \text{at } y = \pm b$$

### a) 対称荷重

$$u = \sum_{n,m} A_{nm} X_n Y_m, \quad \phi = \sum_{n,m} \frac{D}{a} B_{nm} U_n V_m \quad \text{--- (23)}$$

とすると境界条件を満す。先の諸係数を用いて \$A\_{nm}\$, \$B\_{nm}\$ の満すべき条件は

$$(\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) A_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^2 \epsilon \lambda_i^2 \lambda_j^2 k_{ni} h_{mj} A_{ij} \\ + \lambda \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j k_{ni} h_{mj} B_{ij} = \frac{a^4}{D} P_{nm} \quad \text{--- (24-1)}$$

$$\sum_{i,j} (\lambda_i^4 + \lambda^4 \lambda_j^4) K_{pi} D_{0j} B_{ij} + \sum_{\nu,l} \lambda^2 \epsilon K \lambda_\nu^2 \lambda_l^2 E_{p\nu} F_{0l} B_{\nu l} \\ - \lambda \sum_{\nu,l} \lambda_\nu \lambda_l G_{pi} D_{0j} A_{\nu l} = 0 \quad \text{--- (24-2)}$$

であらうと思われる。

### b) 逆対称荷重

$$u = \sum_{p,0} A_{p0} \phi_p \psi_0, \quad \phi = \sum_{p,0} \frac{D}{a} B_{p0} \phi_p \psi_0 \quad \text{--- (25)}$$

とすると境界条件を満す。先と同様に \$A\_{p0}\$, \$B\_{p0}\$ の満すべき条件は、

$$(u_p^4 + \lambda^4 u_g^4) A_{pg} + \sum_{i,j} \lambda^2 z u_i^2 u_j^2 K_{pi} H_{gj} A_{ij} \\ + \chi \sum_{i,j} \lambda u_i u_j K_{pi} H_{gj} F_{ij} = \frac{u^4}{D} F_{pg} \quad \text{--- (26-1)}$$

$$\sum_{i,j} (u_i^4 + \lambda^4 u_j^4) K_{ni} \partial_{mj} B_{ij} + \sum_{i,j} \lambda^2 z k u_i^2 u_j^2 c_{ni} d_{mj} B_{ij} \\ - \chi \sum_{i,j} \lambda u_i u_j \partial_{ni} - m_j A_{ij} = 0 \quad \text{--- (26-2)}$$

“”あらわされる。

### II-3) 境界条件

$$u = u' = N_{xy} = v = 0 \quad \text{at } x = \pm a$$

$$u = u' = N_{xy} = u = 0 \quad \text{at } y = \pm b$$

#### a) 対称荷重

$$u = \sum_{n,m} A_{nm} X_n Y_m, \quad \Phi = \sum_{n,m} \frac{D}{\alpha} B_{nm} U_n V_m \quad \text{--- (27)}$$

とすると境界条件を満たす。同様に条件式は

$$(\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) A_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^2 z \lambda_i^2 \lambda_j^2 k_{ni} h_{mj} A_{ij} \\ + \chi \lambda \lambda_n \lambda_m B_{nm} = \frac{u^4}{D} F_{nm} \quad \text{--- (28-1)}$$

$$\sum_{i,j} K (\lambda_i^4 + \lambda^4 \lambda_j^4) E_{pi} F_{gj} B_{ij} + \sum_{i,j} \lambda^2 z k \lambda_i^2 \lambda_j^2 G_{pi} D_{gj} B_{ij} \\ - \chi \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j G_{pi} D_{gj} A_{ij} = 0 \quad \text{--- (28-2)}$$

“”あらわされる。

#### b) 逆対称荷重

$$u = \sum_{p,q} A_{pq} \phi_p \psi_q, \quad \Phi = \sum_{p,q} \frac{I}{\alpha} B_{pq} \rho_p T_q \quad \text{--- (29)}$$

条件式は

$$(u_p^4 + \lambda^4 u_q^4) A_{pq} + \sum_{i,j} \lambda^2 z u_i^2 u_j^2 K_{pi} H_{qj} A_{ij}$$

$$+ \lambda \lambda u_p u_b B_{pb} = \frac{a^4}{D} P_{pb} \quad \text{--- (30-1)}$$

$$\sum_{p,l} (u_p^4 + \lambda^4 u_l^4) K C_{nl} \alpha_{nl} B_{pl} + \sum_{i,j} \lambda^4 \leq K u_i^2 u_j^2 \alpha_{ni} \beta_{mj} B_{ij} \\ - \lambda \sum_{i,j} \lambda u_i u_j \alpha_{ni} \beta_{mj} A_{ij} = 0 \quad \text{--- (30-2)}$$

II-4) 边界条件为

$$w = w' = N_x = N_{xy} = 0 \quad \text{at } x = \pm a$$

$$w = w' = N_y = N_{xy} = 0 \quad \text{at } y = \pm b$$

a) 对称荷载

$$w = \sum_{n,m} A_{nm} X_n Y_m, \quad \Phi = \sum_{p,b} \frac{D}{a} B_{pb} \Phi_p \Psi_b \quad \text{--- (31)}$$

条件式是

$$(\lambda_n^4 + \lambda_m^4 \lambda_n^4) A_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^4 \leq \lambda_i^2 \lambda_j^2 k_{ni} h_{mj} A_{ij} \\ + \lambda \sum_{p,l} \lambda u_p u_l \alpha_{nl} \beta_{ml} B_{pl} = \frac{a^4}{D} E_{nm} \quad \text{--- (32-1)}$$

$$(u_p^4 + \lambda^4 u_b^4) K B_{pb} + \sum_{i,j} \lambda^4 \leq K u_i^2 u_j^2 K_{pi} D_{ij} B_{ij} \\ - \lambda \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \lambda_j G_{pi} D_{ij} A_{ij} = 0 \quad \text{--- (32-2)}$$

b) 反对称荷载

$$w = \sum_{p,b} A_{pb} \Phi_p \Psi_b, \quad \Phi = \sum_{n,m} \frac{D}{a} B_{nm} X_n Y_m \quad \text{--- (33)}$$

条件式是

$$(u_p^4 + \lambda^4 u_b^4) A_{pb} + \sum_{i,j} \lambda^4 \leq u_i^2 u_j^2 K_{pi} H_{bj} A_{ij} \\ + \lambda \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \lambda_j G_{pi} D_{bj} B_{ij} = \frac{a^4}{D} P_{pb} \quad \text{--- (34-1)}$$

$$(\lambda_n^4 + \lambda^4 \lambda_m^4) K B_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^4 \leq K \lambda_i^2 \lambda_j^2 k_{ni} h_{mj} B_{ij} \\ - \lambda \sum_{i,j} \lambda u_i u_j \alpha_{ni} \beta_{mj} A_{ij} = 0 \quad \text{--- (34-2)}$$

II-5) 边界条件为 (2)

$$w = w' = N_x = v = 0 \quad \text{at } x = \pm a$$

$$W = W^* = N_Y = u = 0 \quad \text{at } y = \pm b$$

実用上最も多い境界条件である。

a) 対称荷重

$$W = \sum_{n,m} A_{nm} X_n Y_m \quad \Phi = \sum_{n,m} \frac{D}{a} B_{nm} \sin \epsilon_n \xi \sin \epsilon_m \eta \quad \text{----- (35)}$$

$$= 1 \quad \epsilon_i = i \lambda_i$$

次の展開係数を用いる。

$$\cos \epsilon_n \xi = \sum_i \delta_{in} X_i \quad ; \quad \delta_{in} = \frac{-\lambda_i^3}{\lambda_i^4 - \epsilon_n^4} (-1)^n \tanh \lambda_i$$

$$\cos \epsilon_m \eta = \sum_j \delta_{jm} Y_j \quad ; \quad \delta_{jm} \text{ は } \delta_{in} \text{ と同じ}$$

$$u_n = \sum_i \alpha_{in} \sin \epsilon_i \xi \quad ; \quad \alpha_{in} = \frac{4 \lambda_i^4}{\epsilon_i^4 - \lambda_i^4} \epsilon_i \tanh \lambda_i (-1)^i$$

$$v_m = \sum_j R_{jm} \sin \epsilon_j \eta \quad ; \quad R_{jm} \text{ は } \alpha_{in} \text{ と同じ}$$

これらの条件式は、

$$(\lambda_n^4 + \lambda_m^4) A_{nm} + \sum_{i,j} \lambda^2 \lambda_i \lambda_j \epsilon_{ni} \epsilon_{mj} A_{ij} \\ + \chi \sum_{i,j} \lambda \epsilon_i \epsilon_j \delta_{ni} \delta_{mj} B_{ij} = \frac{\chi^2}{D} E_{nm} \quad \text{----- (36-1)}$$

$$K(\epsilon_n^2 + \lambda^2 \epsilon_m^2) B_{nm} - \chi \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \lambda_j \alpha_{ni} R_{mj} A_{ij} = 0 \quad (36-2)$$

算例) をあててみる。

b) 非対称荷重

$$W = \sum_{p,q} A_{pq} \Phi_p \Psi_q, \quad \Phi = \sum_{p,q} \frac{D}{a} B_{pq} (\cos \epsilon_p \xi) (\cos \epsilon_q \eta) \quad \text{--- (37)}$$

次の展開係数を用いる。

$$\sin \epsilon_p \xi = \sum_i M_{ip} \Phi_i \quad ; \quad M_{ip} = \frac{-\mu_i^2}{\epsilon_p^4 - \mu_i^4} \epsilon_p (-1)^p \tanh \mu_i$$

$$\sin \epsilon_q \eta = \sum_j N_{jq} \Psi_j \quad ; \quad N_{jq} \text{ は } M_{ip} \text{ と同じ}$$

$$s_p = \sum_\nu g_{p\nu} (\cos \epsilon_\nu \xi) \quad ; \quad g_{p\nu} = \frac{4 \mu_\nu^4}{\mu_\nu^4 - \epsilon_p^4} (-1)^\nu \tanh \mu_\nu$$

$$t_q = \sum_\nu f_{q\nu} (\cos \epsilon_\nu \eta) \quad ; \quad f_{q\nu} \text{ は } g_{p\nu} \text{ と同じ}$$

つぎと条件式は

$$(\mu_p^2 + \lambda^2 \mu_g^2) A_{p0} + \sum_{i,j} \lambda^2 \epsilon_i^2 \mu_j^2 k_{pi} H_{gj} A_{ij} - \chi \sum_{i,j} \lambda \epsilon_{pi} \epsilon_{gj} M_{pi} N_{gj} B_{ij} = \frac{a^4}{D} E_{p0} \quad (38-1)$$

$$(\epsilon_p^2 + \lambda^2 \epsilon_g^2)^2 K B_{p0} - \chi \sum_{i,j} \lambda \mu_p \mu_g \epsilon_{pi} \epsilon_{gj} A_{ij} = 0 \quad (38-2)$$

II-6) 境界条件と

$$W = M_x = u = v = 0 \quad \text{at } x = \pm a$$

$$W = M_y = u = v = 0 \quad \text{at } y = \pm b$$

a) 対称荷重

$$W = \sum_{n,m} A_{nm} \cos \epsilon_n z \cos \epsilon_m y \quad \phi = \sum_{p,q} \frac{D}{a} B_{pq} \Phi_p \Psi_q \quad (39)$$

次の展開係数を用いる。

$$\Phi_p = \sum_i L_{ip} \cos \epsilon_i z \quad ; \quad L_{ip} = \frac{\mu_p}{\epsilon_i^2 - \mu_p^2} (-1)^i \tanh \mu_p$$

$$\Psi_q = \sum_j W_{jq} \cos \epsilon_j y \quad ; \quad W_{jq} \text{ は } L_{ip} \text{ と } |D| \text{ の形}$$

$$\sin \epsilon_n z = \sum_i L_{ni} \Phi_i \quad ; \quad L_{ni} = \frac{\epsilon_i^2}{\epsilon_n^2 - \mu_i^2} \epsilon_n (-1)^n \tanh \mu_i$$

$$\sin \epsilon_m y = \sum_j \Theta_{jm} \Psi_j \quad ; \quad \Theta_{jm} \text{ は } L_{ni} \text{ と } |D| \text{ の形}$$

条件式は

$$(\mu^2 + \lambda^2 \epsilon_m^2) A_{nm} + \chi \sum_{i,j} \lambda \mu_i \mu_j L_{ni} W_{mj} B_{ij} = \frac{a^4}{D} E_{nm} \quad (40-1)$$

$$\sum_{i,j} k(\mu_i^2 + \lambda^2 \mu_j^2) k_{pi} H_{gj} B_{ij} + \lambda^2 \epsilon K \mu_p^2 \mu_g^2 B_{p0} - \chi \sum_{i,j} \lambda \epsilon_i \epsilon_j \Omega_{pi} \Theta_{gj} A_{ij} = 0 \quad (40-2)$$

以上一解の未知常数の満たすべき条件式を示したのであり、systematic に未知数に関する連立一次方程式が得られる。二に示す関数列は常に収斂するものでもなく、逐次計算列に示すように各々4項程度取れば充分と思われ

る。

尚ここに用いた函数列群の直交函数列による展開は一部、 $\eta = \pm 1$  のごく近傍では合致しないものもあるが、領域の他のほとんどの部分によく合致し、又これらは釣合ず、適合条件式内で用いられるのである故、領域の境界のごく近傍を除いた部分でこれらの諸式は満たされることになり、実用上充分の精度を与えると考えられる。

## §2 数値計算例

### 1. $\sigma = \rho(x^2 - y^2)/2$ の場合

既往の研究<sup>[3]</sup>と比較のため同一境界条件、同一寸法で数値計算を行なって図-1に示した。図中フーリエ解、差分解は文献による。 $2a = 2b = 20m$ ,  $t = 0.2m$ ,  $R = 86m$  であって、 $\rho: t/m^2$ ,  $E: kg/cm^2$  であらねると  $w$  は  $m$  で求まる。ここで  $m = 1 \sim 4$  までをとった。結果は非常に良好といえる。尚、 $|A_{44}/A_{11}| \div 1.6 \times 10^{-4}$ ,  $|A_{14}/A_{11}| \div 1.7 \times 10^{-3}$  の収斂速度がある。

又、サイズ変化に伴う  $w$  の変化を図-2に示した。又厚さの変化による場合も同時に示した。但し図-2において  $\gamma t = 100$  の場合の  $w$  は  $\gamma t = 50$  の場合の厚さを基準として示されている。図において両者の差はほとんどないことより、 $w$  は厚さを3乗に比例するといえる。尚  $\sigma = \rho$  の場合であって、全体の変形を知り得るように表-1に  $w$  の値を示した。



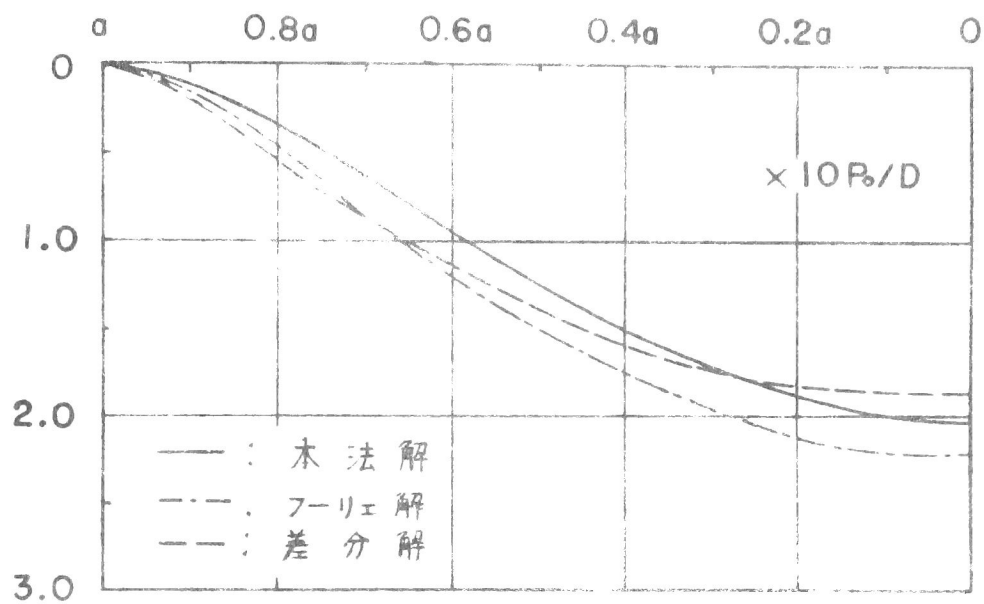


図1  $y=0$  での  $u$  の値

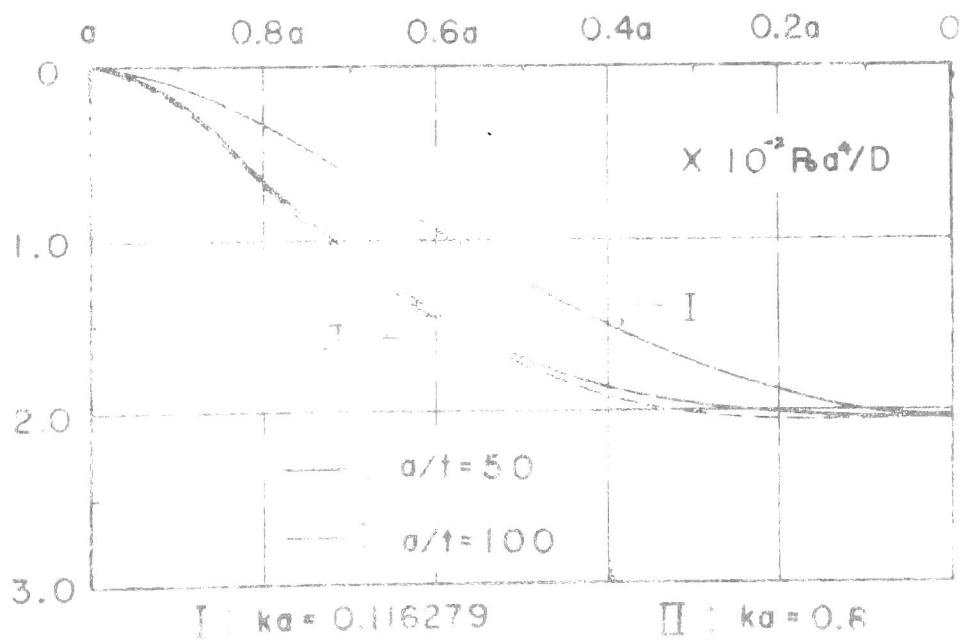


図2  $y=0$  での  $u$  の値比較

表 I  $w$  の値,  $\lambda = 1$ 

		0.8a	0.6a	0.4a	0.2a	0
I	0	0.33208	0.95130	1.51780	1.89602	2.02458
	0.2a	0.30863	0.88716	1.41879	1.77431	1.89542
	0.4a	0.24118	0.69949	1.12812	1.41827	1.51768
	0.6a	0.13952	0.42176	0.69759	0.88725	0.95356
	0.8a	0.04131	0.13842	0.23946	0.30902	0.33429
II	0	0.64898	1.43313	1.84016	2.01853	2.03925
	0.2a	0.57754	1.30183	1.72445	1.95751	2.01347
	0.4a	0.40507	0.93305	1.36700	1.71897	1.83414
	0.6a	0.09009	0.43788	0.91534	1.29798	1.44740
	0.8a	-0.06332	0.08175	0.38647	0.57663	0.66788

I :  $Pa = 0.116279$ II :  $Pa = 0.80000$  $q/t = 50$ 単位  $10^{-2} Pa^4/D$

2.  $z = xy/c$  の場合

$$w = w' = N_x = v = 0 \quad \text{at } x = \pm a \quad (v: y \text{ 方向変位})$$

$$w = w' = N_y = u = 0 \quad \text{at } y = \pm b \quad (u: x \text{ 方向変位})$$

について変形，断面力を求めて図-3~6 に示した。表-2 はその数値である。但し，

$$\lambda = 2a/c = 0.5, \quad a/t = 100$$

である。

H.P. シェルの数個の境界条件に対する解について，断面力，変位を求めるための数値計算プログラム作製上非常に簡単なものも示し，数値計算を行なって十分に精度があることを既往の研究例と比較して示した。

電子計算機使用の都合上多くの算例を示し得ず残念であるが，この方法で多くの算例（各種パラメータを変えて）こそよく H.P. シェル設計の資料を作り得るものと考えらる。

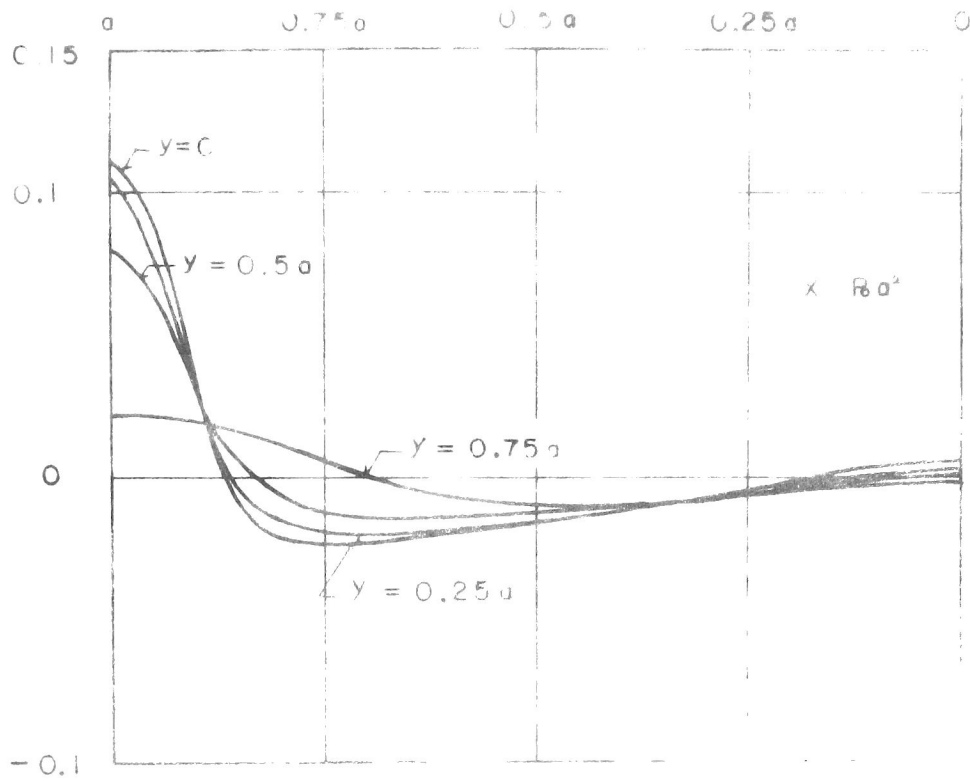


図3  $Z - xy' / c$  の  $Mx$   $y$  の

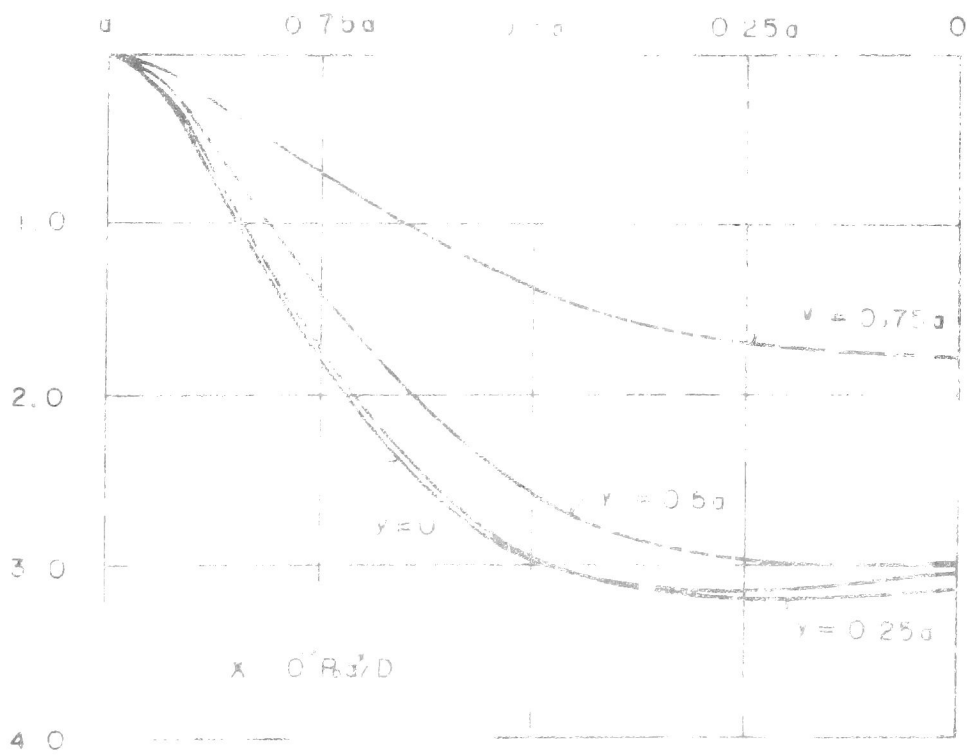


図4  $Z - xy' / c$  の  $Mx$   $y$  の

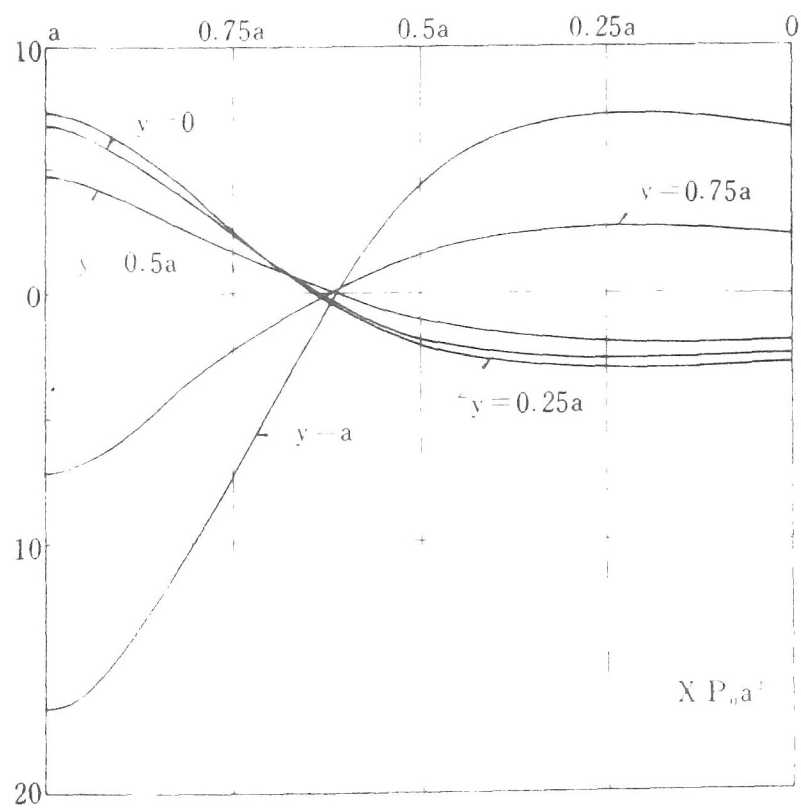
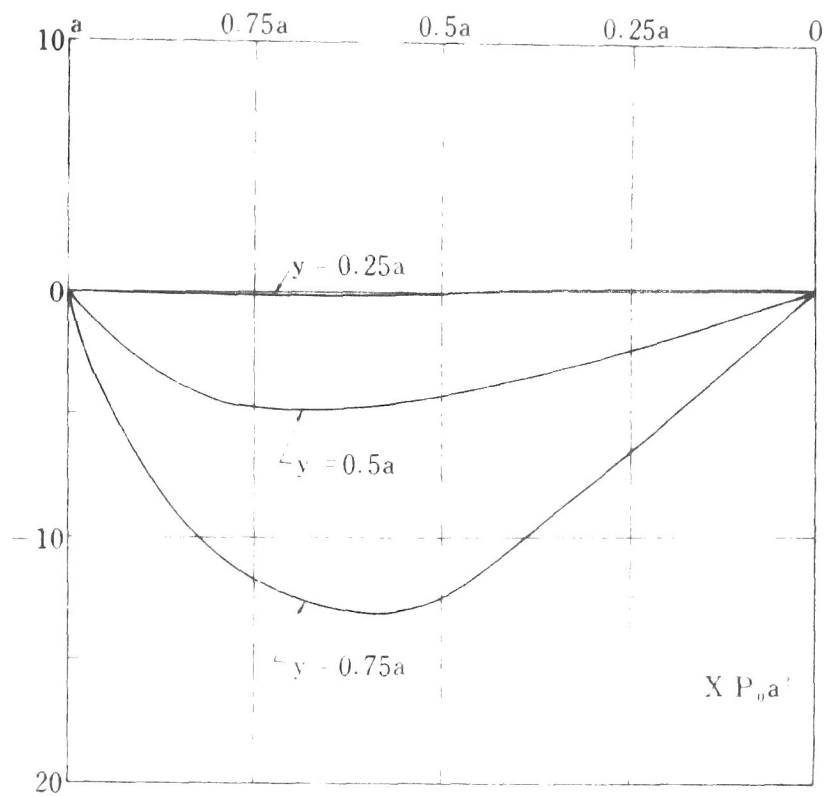


表-II  $a/t = 100$   $\chi = 0.5$   $\lambda = 1$ 

	a	0.75a	0.50a	0.25a	0
w 單位 $10^{-3} P_0 a^4 / D$					
0	0	1.77449	2.98329	3.13173	3.04949
0.25a	0	1.70636	2.95976	3.18364	3.13173
0.50a	0	1.37361	2.57807	2.95976	2.98329
0.75a	0	0.53468	1.37361	1.70636	1.77449
M <sub>x</sub> 單位 $P_0 a^2$					
0	0.11017	-0.02356	-0.01533	-0.00453	0.00512
0.25a	0.10415	-0.02050	-0.01522	-0.00517	0.00392
0.50a	0.08042	-0.01206	-0.01257	-0.00648	0.00116
0.75a	0.02201	0.00508	-0.01053	-0.00327	-0.00233
N <sub>x</sub> 單位 $P_0 a$					
0	0	0	0	0	0
0.25a	0	-0.05474	-0.11488	-0.13469	0
0.50a	0	-4.75358	-4.27503	-2.33675	0
0.75a	0	-11.9413	-12.5374	-6.52102	0
a	0	0	0	0	0
N <sub>xy</sub> 單位 $P_0 a$					
0	6.84405	2.53567	-1.94563	-2.76322	-2.49770
0.25a	7.28217	2.73879	-2.05488	-2.94339	-2.76332
0.50a	4.78038	1.66970	-1.03219	-2.05488	-1.94563
0.75a	-7.16158	-2.09555	1.66970	2.73879	2.53567
a	-16.6460	-7.16158	4.78038	7.28127	6.84405

## 参 考 文 献 リ ス ト (全 編)

## 球殻振動(第1部第一章)

- [1] H.Lamb ; On the Vibrations of a Spherical Shell,  
Proceeding of the London Mathematical Society,  
vol. 14, 1882
- [2] J.W.S.Rayleigh ; The Theory of Sound, 1894
- [3] E.Reissner ; On Vibrations of Shallow Spherical  
Shells, Journal of Applied Physics, Vol.17, 1946
- [4] E.Reissner ; On Transverse Vibrations of Thin, Shal-  
low Elastic Shells, Quart. of Applied Mathematics  
Brown Univ. vol.XIII, No. 2 , 1955
- [5] E.Reissner ; On Axi-symmetrical Vibrations of Shal-  
low Spherical Shells, Quart. of Applied Mathematics  
Brown Univ. vol. XIII, No. 3, 1955
- [6] K.Federhofer ; Zur Berechnung der Eigenschwingungen  
der Kugelschale, Akademie der Wissenschaften in  
Wien, Sitzungsberichte, Math. Klasse, vol.146:2A,  
1937
- [7] M.W.Johnson and E.Reissner ; On Transverse Vibration  
of Shallow Spherical Shells, Quart. of Appl. Math.  
Brown Univ. vol. XV 1958
- [8] 坪井善勝 ; 偏平球殻の公式とその応用..  
日本建築学会論文報告集 第69号 1961
- [9] P.M.Naghdi ; On the General Problem of Elasto-kinetics  
in the Theory of Shallow Shells, Proc. of the I.  
U.T.A.M., Sympo. 1960
- [10] A.Kalnins and P.M.Naghdi ; Axisymmetric Vibrations of  
Shallow Elastic Spherical Shell, Journal of the  
Acoustical Society of America, vol. 32, 1960

- [11] W.H.Hoppmann II ; Frequencies of Vibration of Shallow Spherical Shells, Jour. of Appl. Mech. June, 1961
- [12] A.Kalnins ; Free nonsymmetric vibrations of shallow spherical shells, Proc. of National Cong. Appl.Mech. 4th U.S. 1963
- [13] A.Kalnins ; On Vibrations of Shallow Spherical Shell, Jour. of the Acous. Soc. of America, vol.33,1961
- [14] P.M.Naghdi and A.Kalnins ; On Vibrations of Elastic Spherical Shells, Jour. of Appl. Mech.,vol.29,1962
- [15] 横尾義貫 松岡 理 國枝治郎 ; 球殻振動時の一般解, その1  
日本建築学会論文報告集 第83号, 1963.3月  
"その2" 第84号 1964年 4月
- [16] H.Garnet, M.A.Goldberg and V.L.Salerno ; Torsional Vibrations of Shells of Revolutions, Jour. of Appl. Mech., 1962
- [17] R.R.Archer ; On the Influence of Uniform Stress States On the Natural Frequencies of Spherical Shells, Jour. of Appl. Mech. Sep. 1962
- [18] W.H.Hoppmann II, and C.N.Baronet ; A Study of the Vibrations of Shallow Spherical Shells, Jour. of Appl. Mech. 1963
- [19] 坪井善勝, 川股重也 ; 球殻の横振動固有周期の略算法,  
日本建築学会論文報告集 第83号, 1963年3月
- [20] A.Havers ; Asymptotische Biegetheorie der unbelasteten Kugelschale, Ing.-Archiv 1935
- [21] W.Flügge ; Stresses in Shells, 1960



- [22] M.C.Gray ; Legendre Functions of Fractional Order,  
Quort. of Appl. Math. vol.11, Oct. 1953
- [23] 岩波書店「数学辞典」参照
- [24] 松田 理 ; 曲面板の研究 (学位論文), 1959
- [25] 例文は  
安宅 門司 ; 円筒函数表(複素変数), 丸善, 1948, 等

### 円筒殻の振動 (第1部第二章)

- [1] Lord Rayleigh ; Theory of Sound
- [2] A.E.H.Love ; A Treatise on the Mathematical Theory  
of Elasticity , 1892
- [3] W.Flügge ; Statik und Dynamik der Schalen , 1934
- [4] E.H.Kennard ; The new approach to shell theory:  
circular cylinders, Jour. of Appl. Mech. 1953 3
- [5] P.M.Naghdi and J.G.Berry ; On the equations of mo-  
tions of cylindrical shells, J.of Appl. Mech. 1954
- [6] M.L.Baron and H.H.Bleich ; Tables for Frequencies and  
Modes of Free Vibrations of Infinitely Long Thin  
Shells, Jour. Appl. Mech. vol. 21, 1954 6
- [7] H.H.Bleich and M.L.Baron ; Free and Forced Vibrations  
of an Infinitely Long Cylindrical Shell in an Infi-  
nite Acoustic Medium, J. of Appl. Mech. 1954 6
- [8] 石崎 澁雄 ; 円弧シリンドラールの振動について.  
日本建築学会論文集 27号 昭和29年(1954)
- [9] 石崎 澁雄 ; 円弧シリンドラールの振動について 第29号.(1954)
- [10] Yu, Yi-Yuan ; Free Vibrations of Thin Cylindrical  
Shells Having Finite Lengths with Freely Supported  
and Clamped Edges, J. Appl. Mech. vol. 77, 1955

- [11] P.S.Epstein ; On the Theory of Elastic Vibrations in  
Plates and Shells, J.of Math. and Phys. vol.21  
1942
- [12] 日置興一郎 ; 円筒曲板の振動について, 学位論文, 1959年
- [13] L.R.Koval ; On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to an initial static torque,  
Proc. of National Cong. Appl. Mech. 4th U.S. 1963
- [14] I.Mirsky ; Vibrations of Orthotropic, Thick Cylindrical Shells, J.of Acous. Soc. of America. Jan. 1964
- [15] G.W.McMahon ; Experimental Study of the Vibrations of Solid, Isotropic, Elastic Cylinders, J.of Acous. Soc. of America., Jan. 1964

### H.P殻の振動 (第1部 第三章)

- [1] 例文は"  
H.Duddeck ; Die Biegetheorie der flachen hyperbolischen Paraboloidschale  $z=cxy$ , Ing.-Archiv, 1961  
松岡 理 ; H.P.シェルについての研究, 学会論文報告集 66号, 1960
- K.Apeland ; On the Analysis of Bending Stresses in Shallow Hyperbolic Paraboloidal shells, Proc. of W.C.S.S. 1964
- [2] 松岡 理 ; 曲面板の研究 1959
- [3] O.Matsuoka ; Apploximation of the Bending Theory of Thin Shells, Memoirs of Kyoto Tech. Univ. 1957
- [4] DANA YOUNG ; Vibrations of Rectangular Plates by the Ritz Method, 1950, J. of Appl. Mech.

- [5] 宇野利雄：計算機のための数値計算 朝倉書店
- [6] 多賀道恒：立体格子の振動，京大修士論文 1963

### 円孔を有する球殻(第Ⅱ部第一章)

- [1] W.Flügge ; Statik und Dynamik der Schalen, 1934
- [2] 坪井善勝 他3名：局部荷重を受ける球形殻の解析  
日本建築学会論文集第62号 1959年

### 円孔を有する円筒殻(第Ⅱ部第二章)

- [1] D.withum ; Die Kreiszyllinderschale mit kreisformigen Ausschnitt unter Schubbeanspruchung. ( Gekurzte Fassung) Ing.-Archiv, 1958
- [2] 松岡 理：曲面板の研究 1959年
- [3] G.N.Watson ; Theory of Bessel Function
- [4] 安宅 門司：円筒函数表(複素変数), 1948年

### 集中荷重を受ける球殻(第Ⅲ部第一章)

- [1] W.Flügge ; Stresses in Shells, 1960 Springer Verlag.
- [2] 野邑 雄吉：特殊函数とその応用, 1962.

### 集中荷重を受ける円筒殻(第Ⅲ部第二章)

- [1] W.Flügge and D.A.Conrad ; Thermal Singularities for Cylindrical Shells, Proc. of the 3rd U.S. National Cong. of Appl. Mech. 1958

- [2] A. Jahanshahi ; Force Singularities of Shallow Cylindrical Shells, J. of Appl. Mech. Sep. 1963
- [3] A. Jahanshahi ; Some Notes on Singular Solutions and the Green's Functions in the Theory of Plates and Shells, J. of Appl. Mech. 1964
- [4] 宇陀 門司 ; 円 錐 歪 数 表 女 学, 1948 年

#### H.P. 殻の実用的な解について (第V部)

- [1] 1) 列之は'
  - W. Bongard ; Zur Theorie und Berechnung von Schalentragerwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloid, 1957
  - H. Duddeck ; Die Biegetheorie der flachen hyperbolischen Paraboloidschale  $z = cxy$ , Ing.-Arch. 1961
  - 松岡 理 ; H.P. エイルについての研究 学会論報集 66号
  - K. Apeland ; On the Analysis of Bending Stresses in Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shells, Proc. of W.C.S.S. 1964
- [2] W. Flügge and D. A. Conrad ; A Note on the Calculation of Shallow Shells, Jour. of Appl. Mech. 1959
- [3] 坪井 善勝, 高橋 敏雄 ; 周辺固定支持された H.P. エイルのフリー解析 学会論報集 第 104 号, 1964 年.
- [4] Nowachi ; Dynamics of Elastic Systems, 1963

#### Inextensional 解について (第IV部)

- [1] C. R. Steele ; Nonsymmetric Deformation of Dome-Shaped Shells of Revolution, J. of Appl. Mech.

- [2] 横尾, 松岡, 圓板 ; 球殻振動時一般解 論報集 83号
- [3] K.Apeland and E.P.Popov ; Analysis of Bending Stresses  
in Translational Shells, Proc. of Colloq. on Simpli-  
fied Calculation Methods, Brussels, Sep. 4-6 , 1961
- [4] W.Flügge ; Stresses in Shells, 1960
- [5] H.Duddeck ; Die Biegetheorie der flachen hyperboli-  
schen Paraboloidschale  $z = cxy$  , Ing.-Arch. 1962

## おわりに

当著は筆者が大学卒業以来6年半の間に行なってきた理論的、実験的研究のうちより、曲面板構造の解析上残された数多くの重要な問題のうち若干の問題を解決し、且つ構造計画上役立つと思われる理論的研究のみを集めたものである。実験的研究はその性質上、筆者一人で行ない得るものではなく常に共同研究であるゆえ、筆者の名のみにて論文に記すことはためらわれるので採用していない。

「曲面板構造の構造計画」という途轍もない目標に向って始めた研究生活ではあるが、大学院学生生活4年を含めての6年半では何程の事も爲し得ず、前途のますます遼遠なることを知り、將に螻蛄の斧の誇りを免がれずと、痛切に身にしみて感じられる今日此頃である。

しかし、このあたりで今までの成果を一応まとめ大方の批判、批評を請うと共に、得るべき点があるならば少しでも役立てていただこうと思い、本著をまとめた次第である。したがって本著全体が筆者が目ざす研究の序論の一部と見做されるべきものである。

筆者が研究活動に従事し得、また本著に少しでも役立つ点が見出されるならば、それらは一重に良き指導教授横尾義實先生、名大の松岡 理教授の公私にわたる御指導、御鞭撻のお蔭である。両教授のごとき学者としてはもとより教育者としても得難き先生に手取り足取りして

指導していただいた筆者は誠に幸せ者というべきである。  
また京大中村恒善助教授のきびしき御指導と有益な御批判、助言が無かったなら本著の研究のいくつかは爲し得なかったであろう。また大阪市大の日置興一郎教授にもしばしば御指導と助言をいただいた。これら横尾、松岡、日置教授、中村助教授といった優れた良き師にめぐまれたことは何といっても幸運であった。

他方、学友須賀好富君（近大）、土井茅司君（京大）、中村泰人君（京大）、同じ研究室の福島 勉君（スタンフォード大）、多賀直恒君（九大）、水野和夫君（川重）、松井徹哉君（名大）、松永裕之君（大学院）、水野雅文君（大学院）、松田 明君（大学院）といった後輩というよりむしろ研究、遊び仲間である諸兄らとの暖かい友情ある交流なくしてはこれらの研究は爲し得なかったと思う。

文献を参照させていただいた諸賢、はじめ諸先生方、諸兄に深くお礼申し上げますと共に、これから本格的に始まる研究生活において一層の御指導と御鞭撻をお願いし、また本著をまとめるにあたって吉田亘利君（事務員）に多大の助力をいただいたことを付言し、ペンを置く。

涸れた月の光がさし込む研究室にて、

1965年仲秋

著 者



